2007 年後期

直角をはさむ二辺の長さが a，b の直角三角形がある．内接円の半径を r とする．

(1) r を a，b で表せ．

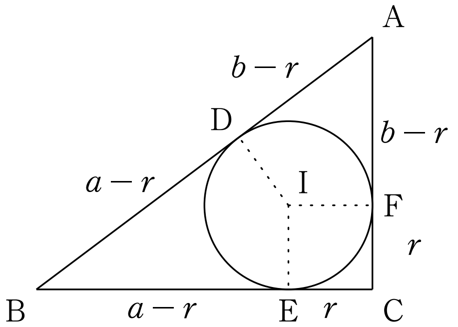
(2) a，b は整数とし，$r=5$ とする．このような a，b の組をすべて求めよ．

考え方　内接円の半径と 3 辺の長さの関係は定番問題なので解いたことあると思います．そんなに難しくないので，ぜひとも完答したいところです．

解

下図のような △ABC を考える ($\angle\mathrm{C}=90^\circ$)．

内接円の半径を I とし，辺 AB，BC，CA との接点を D，E，F とする．



(1) 内接円の半径が r なので，

$$\mathrm{CE}=\mathrm{CF}=r$$

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BE}=a-r$$

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AF}=b-r$$

斜辺の長さが $(a-r)+(b-r)=a+b-2r$ なので，三平方の定理より

$$a+b-2r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$r=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

(2) $r=5$ より

$$\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}=5$$

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+b-10$$

$$a^2+b^2=(a+b-10)^2$$

$$a^2+b^2=a^2+b^2+100+2ab-20b-20a$$

$$ab-10a-10b+50=0$$

$$(a-10)(b-10)=50$$

$r=5$ なので，$a>5$ かつ $b>5$．

よって，$a-10>-5$，$a-10>-5$ なので，以下のような組み合わせになる．

$a-10$	50	25	10	5	2	1
$b-10$	1	2	5	10	25	50

よって，

a	60	35	20	15	12	1 1
b	11	12	15	20	35	60

■

注　(1) について．三角形の面積に注目して立式しても構いません．すなわち，斜辺の長さを c とすると，

$$\frac{1}{2}ab=\frac{r}{2}(a+b+c)$$

$$\therefore\ r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$$

上の解答と形が全く違いますが，有理化すれば同じになります．当然，$r=\dfrac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$ としても正解です．