2007 年前期

m を整数とし，$f(x) = x^3 + 8x^2 + mx + 60$ とする．

(1) 整数 a と，0 でない整数 b で，$f(a+bi) = 0$ をみたすものが存在するような m をすべて求めよ．ただし，i は虚数単位である．

(2) (1) で求めたすべての m に対して，方程式 $f(x) = 0$ を解け．

考え方　$f(a+bi) = 0$ となるので，$x = a+bi$ を $f(x)$ に代入した人もいるかもしれません．もちろんできますが計算が大変です (➾注)．「あること」に言及した上で，解と係数の関係を利用するのが良いでしょう．

(1) が終われば，(2) はほとんど終わったようなもんです．

解　$f(x) = 0$ は実数係数の方程式なので，$a+bi$ が解のとき，その共役複素数 $a-bi$ もまた解である．

したがって，$f(x) = 0$ の 3 つの解を $a+bi$, $a-bi$, c とおくと，解と係数の関係より

$$\begin{cases}(a+bi)+(a-bi)+c=-8\\(a+bi)(a-bi)+(a-bi)c+c(a+bi)=m\\(a+bi)(a-bi)c=-60\end{cases}$$

よって，

$$\begin{cases}2a+c=-8 & \cdots\cdots① \\ a^2+b^2+2ac=m & \cdots\cdots② \\ c(a^2+b^2)=-60 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

① より，$c=-2a-8$

②, ③ に代入して

$$\begin{cases}-3a^2+b^2-16a=m & \cdots\cdots②' \\ (a^2+b^2)(a+4)=30 & \cdots\cdots③'\end{cases}$$

③$'$ より，$0 < a^2+b^2 \leqq 30$ だから

$$-5 \leqq a \leqq 5$$

$$\therefore\ -1 \leqq a+4 \leqq 9$$

したがって，

a^2+b^2	30	15	10	6	5
$a+4$	1	2	3	5	6

b^2	21	11	9	5	1
a	-3	-2	-1	1	2

このうち b^2 が平方数になる場合を選んで調べると，

$$\therefore\ (a,\ b)=(-1,\ \pm3),\ (2,\ \pm1)$$

$(a,\ b)=(-1,\ \pm3)$ のとき，
$c=-6$, よって，$m=22$
$(a,\ b)=(2,\ \pm1)$ のとき，
$c=-12$, よって，$m=-43$
したがって，もとめる m は

$$m=22,\ -43$$

(2) (1) より，3 つの解が $a\pm bi$, c であるので
$m=22$ のとき，$x=-1\pm3i$, -6
$m=-43$ のとき，$x=2\pm i$, -12

■

➾注　(1) の解答の最初の文言に注目してください．理由なしに「$a+bi$ が解ならば $a-bi$ も解である」とは言えません．必ず「実数係数の方程式だから」という理由が必要です．なぜなんでしょうか？近くの理系の人に聞いてくださいね．

➾注　(1) で $f(a+bi)=0$ を代入してやってみましょう．

$(a+bi)^2=a^2+2abi+(bi)^2=a^2-b^2+2abi$

$$(a+bi)^3=a^3+3a^2(bi)+3a(bi)^2+(bi)^3 = a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i$$

したがって，

$f(a+bi)=(a+bi)^3+8(a+bi)^2+m(a+bi)+60$

実部と虚部に分けて計算すると

実部 $=a^3-3ab^2+8(a^2-b^2)+ma+60$

虚部 $=3a^2b-b^3+8(2ab)+mb$

$f(a+bi)=0$ より，a，b は実数なので，
$a^3-3ab^2+8(a^2-b^2)+ma+60=0$ $\cdots(*)$
$3a^2b-b^3+8(2ab)+mb=0$ $\cdots(**)$
$(**)$ より，$b \fallingdotseq 0$ なので

$$3a^2-b-2+16a+m=0$$
$$m=-3a^2+b^2-16a \longleftarrow ②'\text{に同じ}$$

これを $(*)$ に代入して

$$a^3-3ab^2+8(a^2-b^2)+(-3a^2+b^2-16a)a+60=0$$
$$-2a^3-2ab^2-8a^2-8b^2+60=0$$
$$a^3+ab^2+4a^2+4b^2-30=0$$
$$(a^2+b^2)(a+4)=30 \longleftarrow ③'\text{に同じ}$$

このように，全く同じ結果が得られます．

✎注 $(a^2+b^2)(a+4)=30$ から，まともに全組み合わせを考えると

a^2+b^2	30	15	10	6	5	3	2	1
$a+4$	1	2	3	5	6	10	15	30

全部で 8 通りを考えることになります．まあ，できなくもないですが (後半は明らかに不適なので)，上の解答では最初にできるだけの絞り込みをしてみました (3 通り減っただけですが)．