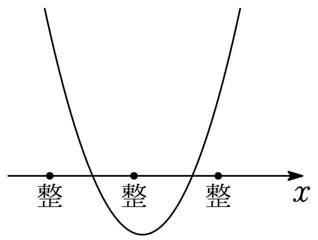
2008 年前期

$k$ を正の整数とする．$5n^2-2kn+1<0$ をみたす整数 $n$ が，ちょうど 1 個であるような $k$ をすべて求めよ．

考え方　2 次不等式の問題なので，整数問題の範疇に入れるかどうか迷いましたが，まあ，やってみましょう．

2 次不等式を解く基本は，2 次関数のグラフのイメージです．つまり，本問の場合，2 次関数 $f(x)=5x^2-2kx+1$ のグラフをイメージすると思います．この 2 次関数のグラフが，少なくとも $x$ 軸と交わり，$x$ 軸との交わった区間内に整数を 1 個だけ含んでいれば良いのです (下図参照)。




つまり，グラフが $x$ 軸とそこそこの区間の長さで交わる必要がありそうです．そのことを踏まえると以下のような答案になるでしょう．

**解**　$f(x)=5x^2-2kx+1$ とおく．

$f(n)<0$ をみたす整数 $n$ が，ちょうど 1 個であるためには，2 次方程式 $f(x)=0$ が異なるの 2 つの実数解をもち，かつ，その差が 2 以下であることが必要である．

$f(x)=0$ の判別式を $D$ とすると，

$$D/4=k^2-5>0$$

このとき，$f(x)=0$ の 2 つの実数解の差は

$$\frac{k+\sqrt{k^2-5}}{5}-\frac{k-\sqrt{k^2-5}}{5}=\frac{2}{5}\sqrt{k^2-5}$$

よって，

$$\frac{2}{5}\sqrt{k^2-5}\leqq 2$$

$$\sqrt{k^2-5}\leqq 5$$

$$\therefore\ 0<k^2-5\leqq 25$$

$$5<k^2\leqq 30$$

$$\therefore\ k=3,\ 4,\ 5$$

$k=3$ のとき，$5n^2-6n+1<0$ より，
$(5n-1)(n-1)<0$．$\therefore\ \dfrac{1}{5}<n<1$
この不等式を満たす整数 $n$ は存在しない．

$k=4$ のとき，$5n^2-8n+1<0$ より，
$\dfrac{4-\sqrt{11}}{5}<n<\dfrac{4+\sqrt{11}}{5}$
この不等式を満たす整数 $n$ は $n=1$ のみ．

$k=5$ のとき，$5n^2-10n+1<0$ より，
$\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}<n<\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}$
この不等式を満たす整数 $n$ は $n=1$ のみ．

したがって，求める $k$ の値は

$$k=4,\ 5$$

■

**注**　グラフの様子から，解の差が 2 以下であるという必要条件で候補を絞り込み，個々を検証して (十分条件)，正解を得ています．上の解答では，解の公式で解を求めて，直接に差を求めていますが，解と係数の関係を用いてもできます．でも，直接やった方が早いです．

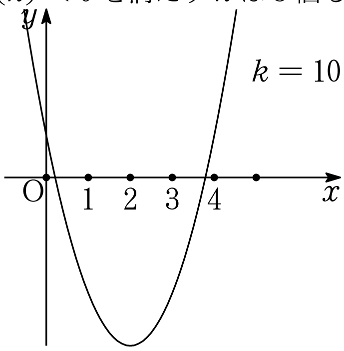
**注**　別解を考えましょう．
$f(x)=5x^2-2kx+1$ とおくと

$$f(x)=5\left(x-\frac{k}{5}\right)^2+1-\frac{k^2}{5}$$

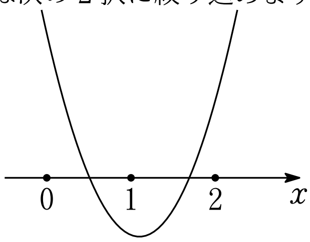
$f(0)=1>0$，軸 $x=\dfrac{k}{5}>0$ であることに注意してください．

$y$ 切片が固定されているので，$k$ の値が大きくなればなるほど，頂点の $y$ 座標が小さくなり (つまり，グラフがどんどん下に沈んでいく)，$x$ 軸との交点の幅も広くなるので，$f(n)<0$ を満たす整数の個数も増えていきます．つまり，$k$ の値はあまり大きくはならないだろう，と予想できます．

例えば，頂点が 2 の場合，つまり，$k=10$ の場合，$f(x)=5x^2-20x+1$ で，頂点は $(2,\ -19)$．このときグラフの様子は以下のようになります．$f(n)<0$ を満たす $n$ は 3 個もあります．

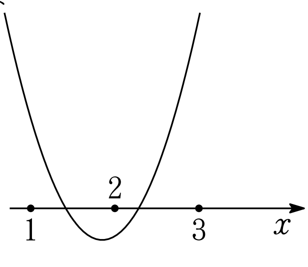



つまり，2 次関数 $y=f(x)$ のグラフの頂点の $x$ 座標が 2 の時ですら，すでにグラフが下に行き過ぎてアウトなわけですから，絶対に，頂点の $x$ 座標は 2 未満でなければならず，となれば「$f(n)<0$ を満たす整数が 1 個になるとき，その 1 個は $n=1$ のみか $n=2$ のみしか無理なのではないか」と考えることができるでしょう．つまり，グラフの形としては次の 2 択に絞り込めます．




$n=1$ のみの場合

または




$n=2$ のみの場合

$f(0)>0$ は確定しているので，まずは $f(1)$ の符号から調べることになりますね．$f(1)$ の符号が確定すれば，この 2 つの候補をさらにどちらかに確定することができるからです．

**解**（別解）

$f(x)=5x^2-2kx+1=5\left(x-\dfrac{k}{5}\right)^2+1-\dfrac{k^2}{5}$

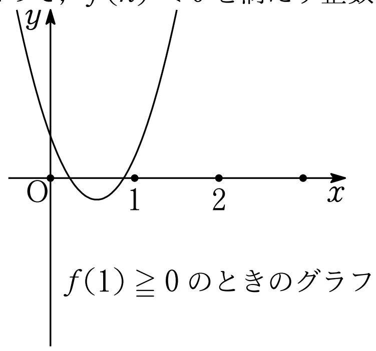
$f(0)=1>0$，$f(1)=6-2k$．

$f(1)\geqq 0$ とすると，$6-2k\geqq 0$ より，$0<k\leqq 3$

このとき，頂点の $x$ 座標 $x=\dfrac{k}{5}$ は

$$0<\frac{k}{5}\leqq\frac{3}{5}<1$$

なので，$f(n)<0$ を満たす整数は存在しない．




よって，$f(1)<0$ である．

したがって，$f(n)<0$ を満たす整数がただ 1 つ存在するとすれば，それは $n=1$ であり，そのための条件は

$$f(2)\geqq 0$$

$f(1)<0$ かつ $f(2)\geqq 0$ より

$$3<k\leqq\frac{21}{4}$$

$$\therefore\ \ k=4,\ \ 5$$

■