2009 年前期

2 以上の整数 m，n は $m^3+1^3=n^3+10^3$ をみたす．m，n を求めよ．

考え方　整数問題の大原則である「席の形を作る」です．指数が全て 3 乗なので，うまく因数分解できるはずです．あとは，組み合わせを考えて調べるだけです，少し調べれば組み合わせの数を減らすことができますよ．

解　$m^3+1^3=n^3+10^3$ より

$$m^3-n^3=10^3-1^3$$
$$(m-n)(m^2+mn+n^2)=999$$
$$(m-n)(m^2+mn+n^2)=3^3\times 37$$

ここで，もとの式に注目すると，$n \geqq 2$ なので，$m \geqq 11$ であることが分かる．

したがって，

$$m^2+mn+n^2 \geqq n^2+11n+121$$
$$n^2+11n+121 \geqq 2^2+11\times 2+121=147$$
$$\therefore\ \ m^2+mn+n^2 \geqq 147$$

したがって，$m-n$ と m^2+mn+n^2 の組み合わせは以下の通り．

$m-n$	3	1
m^2+mn+n^2	$3^2\times 37$	$3^3\times 37$

(i)　$m-n=3$，$m^2+mn+n^2=333$ のとき $m=n+3$ を代入して

$$(n+3)^2+(n+3)n+n^2=333$$
$$3n^2+9n+9=333$$
$$n^2+3n-108=0$$
$$(n+12)(n-9)=0$$

$n \geqq 2$ より，$n=9$．よって，$m=12$

(ii)　$m-n=1$，$m^2+mn+n^2=999$ のとき $m=n+1$ を代入して

$$(n+1)^2+(n+1)n+n^2=999$$
$$3n^2+3n+1=999$$

(左辺) は 3 で割ると 1 余り，(右辺) は 3 で割り切れるの矛盾．よって，この場合の m，n は存在しない．

(i)(ii) より

$$(m,\ n)=(12,\ 9)$$

■

注　「もとの式に注目すると，$n \geqq 2$ なので，$m \geqq 11$ であることが分かる」ということが分かりますか．

$$m^3+1^3=n^3+10^3$$

を見れば，右辺側に 10^3 があり，さらに n^3 を加えてあるので，これを見ただけで，m はそこそこデカい数なはず，と思いますよね．だから,，$m \geqq 11$ になるのは，自然な発想だと思います．

注　今回のポイントは，$m-n$ と m^2+mn+n^2 の組み合わせを 2 通りにまで絞り込めたことにあります．999 の約数は全部で 8 個あるので，全部の組み合わせを考えると 8 通りあるはずです (もし負の数の場合もあればさらに倍！)．そのすべてを書き出して，調べても良いのですが，あまりに芸がありません．せめて，m も n も 2 以上なので

$$m^2+mn+n^2 \geqq 2^2+2\times 2+2^2=12$$

として，少し絞り込んで欲しいところです．