2010 年後期

a を正の奇数とする．次の (i)(ii) をみたす整数 b，c の組がちょうど 3 つ存在するような最小の a を求めよ．

(i) a，b，c は直角三角形の 3 辺の長さである．

(ii) $a < b < c$

考え方　直角三角形の 3 辺に関する問題は頻出で，一橋大学でも過去に何回も出題されています．

また，「条件に合う最小のものを求めよ」というタイプも頻出ですが，このタイプの問題は，小さいものから順番に調べていって，最初に該当するものを見つける，という作業的な問題であることが多いです．実は，今回の問題も，a が奇数なので，$a = 1, 3, 5, 7, \cdots$ と順番に調べていくことになります．なので，あまり，数学的な問題ではありませんね．その調べる方法を減らす方法を探る，という点では，数学的なのかもしれませんが．

解　条件 (ii) より，c が一番長い辺なので，c が斜辺である．よって，

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 = (c+b)(c-b)$$

(i) $a = 1$ のとき

$$(c+b)(c-b) = 1$$

$a < b < c$ より，$1 < b < c$ なので，$c + b > 5$．
よって，この等式をみたす整数 b，c は存在しない．

(ii) $a = p$（p は素数）のとき

$$(c+b)(c-b) = p^2$$

$b > 0$，$c > 0$，$c + b > c - b$ より，

$$(c+b,\ c-b) = (p^2,\ 1)$$

このとき，$b = \dfrac{p^2-1}{2}$，$c = \dfrac{p^2+1}{2}$ と 1 組しか存在しないので不適．

以上のことから，a が 1 と素数の時は不適であることが分かったので，それ以外の奇数の場合について，順番に検証していく．

(iii) $a = 9$ のとき

$$(c+b)(c-b) = 9^2 = 3^4$$

$b > 0$，$c > 0$，$c + b > c - b$ より，

$c+b$	3^4	3^3
$c-b$	1	3

よって，

$$(b,\ c) = (40,\ 41),\ (12,\ 15)$$

いずれも $9 < b < c$ を満たしているが，2 組しか存在しないので不適．

(iv) $a = 15$ のとき

$$(c+b)(c-b) = 15^2 = 3^2 \cdot 5^2$$

$b > 0$，$c > 0$，$c + b > c - b$ より，

$c+b$	$3^2 \cdot 5^2$	$3^2 \cdot 5$	$3 \cdot 5^2$	5^2
$c-b$	1	5	3	3^2

よって，

$$(b,\ c) = (112,\ 113),\ (20,\ 25),\ (33,\ 36),\ (8,\ 17)$$

このうち，$13 < b < c$ を満たしているのは 3 組あるので適する．

したがって，以上より，求める最小の a は

$$a = 15$$

■

注　最初にも述べたように，$a = 1, 3, 5, 7, \cdots$ と順番に調べていくだけなのですが，ひとつひとつやると，正解の $a = 15$ にたどり着くまで 8 回場合分けすることになります．まあ，コツコツやってもいいんですが，やってるうちに「同じようなことの繰り返しやん」と気づいて，「素数で一括してやろう」という発想に持っていって欲しいです．