2010 年前期

0 以上の整数 a_1，a_2 があたえられたとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

により定める．

(1) $a_1 = 1$，$a_2 = 2$ のとき，a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ．
(2) $a_2 = 3a_1$ のとき，$a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数であることを示せ．

考え方　非常に難しい問題です．

(1) の「10 で割った余り」とは一の位の数字のことなので，とりあえず予想してみようか，と思ったことでしょう．以下，一の位だけを抜き出してみます．

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	2	8	0	8	8	6	4	0	4

規則性が全く分かりません．さらにもう 10 個調べてみよう．

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
4	8	2	0	2	2	4	6	0	6

まだ規則性が全く分かりません．さらにもう 10 個調べてみよう．

a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}	a_{30}
6	2	8	0	8	8	6	4	0	4

なぬ！　なんか出てきましたね．

$a_{22} \equiv a_2$，$a_{23} \equiv a_3$，$a_{24} \equiv a_4$，……，

つまり，$n \geqq 2$ のときに周期 20 で変化していることが分かります．よって，答えだけで良ければ，$2010 = 20 \times 100 + 10$ なので，$a_{2010} \equiv a_{10} \equiv 4$．つまり，$a_{2010}$ を 10 で割った余りは 4 となります．しかし，記述答案ですので，「周期が 20 であること」を証明する必要がありますが，これがなかなか難しい (おそらく無理だと思います)．

ダイレクトに a_{2010} を調べる方法もあります (✎注)．しかし，a_n が分数の形で表されるので，単純に合同式は使えません．分子の「何に注目」すれば良いのでしょうか．

解　(1) まずは，漸化式の一般項を求める．

漸化式より

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) & \cdots\cdots① \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

① より，

$$a_{n+1} + 2a_n = (a_2 + 2a_1)3^{n-1} \cdots\cdots③$$

② より，

$$a_{n+1} - 3a_n = (a_2 - 3a_1)(-2)^{n-1} \cdots\cdots④$$

③ − ④ より

$$5a_n = (a_2 + 2a_1)3^{n-1} - (a_2 - 3a_1)(-2)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{(a_2 + 2a_1)3^{n-1} - (a_2 - 3a_1)(-2)^{n-1}}{5} \cdots\cdots⑤$$

(1) ⑤ より，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ とすると

$$a_n = \frac{4 \cdot 3^{n-1} + (-2)^{n-1}}{5}$$

$n \geqq 2$ のとき，a_n の一の位が周期 20 で変化することを示す．そのためには，

$$a_{n+20} \equiv a_n \pmod{10}$$

つまり，差が 10 の倍数であることを示せばよい．

$$\begin{aligned}
&a_{n+20} - a_n \\
=&\frac{4\cdot 3^{n+19}+(-2)^{n+19}}{5} - \frac{4\cdot 3^{n-1}+(-2)^{n-1}}{5} \\
=&\frac{4(3^{n+19}-3^{n-1})+(-2)^{n+19}-(-2)^{n-1}}{5} \\
=&\frac{4\cdot 3^{n-1}(3^{20}-1)+(-2)^{n-1}((-2)^{20}-1))}{5} \\
=&\frac{4\cdot 3^{n-1}(3^{10}+1)(3^{10}-1)+(-2)^{n-1}(2^{10}+1)(2^{10}-1)}{5}
\end{aligned}$$

$$3^{10}+1=(3^5)^2+1=243^2+1=59050$$
$$2^{10}+1=1024+1=1025$$

$$\begin{aligned}
&\frac{4\cdot 3^{n-1}(3^{10}+1)(3^{10}-1)}{5} \\
=&\frac{4\cdot 59050\cdot 3^{n-1}(3^{10}-1)}{5} \\
=&4\cdot 11810\cdot 3^{n-1}(3^{10}-1)
\end{aligned}$$

これは 10 の倍数である．

$$\begin{aligned}
&\frac{(-2)^{n-1}(2^{10}+1)(2^{10}-1)}{5} \\
=&\frac{(-2)^{n-1}\cdot 1025\cdot(2^{10}-1)}{5} \\
=&(-2)^{n-1}\cdot 205\cdot(2^{10}-1)
\end{aligned}$$

$n \geqq 2$ のとき，これは 10 の倍数である．

したがって，$n \geqq 2$ のとき，$a_{n+20}-a_n$ は 10 の倍数になるので，a_n の一の位の数字は周期 20 で循環することが分かる．

$2010 = 20\times 100+10$ なので，a_{2010} の一の位の数字は a_{10} の一の位の数字に等しい．

a_1 から a_{10} までの一の位を順番に書き出すと

1，2，8，0，8，8，6，4，0，4

なので，a_{2010} を 10 で割った余りは 4 となる．

(2) ⑤より，$a_2 = 3a_1$ とすると

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 3^{n-1} \\
a_{n+4}-a_n &= a_1(3^{n+3}-3^{n-1}) \\
&= a_1 3^{n-1}(3^4-1) \\
&= 80a_1 3^{n-1}
\end{aligned}$$

したがって，$a_{n+4}-a_n$ は 10 の倍数である．

■

注　a_{2010} を直接調べる方法を紹介します．

$$a_{2010} = \frac{4\cdot 3^{2009}+(-2)^{2009}}{5}$$

の一の位を調べるためには，分子の下二桁の数字が分かればよい．つまり，

$$4\cdot 3^{2009}+(-2)^{2009} \pmod{100}$$

を計算する．

まず，$4\cdot 3^{2009} = 4\cdot(5-2)^{2009}$ であり，$(5-2)^{2009}$ を二項定理で展開したとき，5^2〜5^{2009} の項は 4 倍することで下二桁が 00 になるので，全体としての下二桁に影響はない．よって，5^1，5^0 の項のみを考える．

$$5^1\text{の項} = 4\cdot {}_{2009}\mathrm{C}_1 5^1(-2)^{2008} = 2009\cdot 20(-2)^{2008}$$
$$5^0\text{の項} = 4\cdot {}_{2009}\mathrm{C}_0 5^0(-2)^{2009} = 4(-2)^{2009}$$

なので，以下，100 を法として合同式を計算すると，

$$\begin{aligned}
&4\cdot 3^{2009}+(-2)^{2009} \\
\equiv&2009\cdot 20(-2)^{2008}+4(-2)^{2009}+(-2)^{2009} \\
\equiv&2009\cdot 20(-2)^{2008}+5(-2)^{2009} \\
\equiv&2009\cdot 20\cdot 2^{2008}-5\cdot 2^{2009} \\
\equiv&2009\cdot 10\cdot 2^{2009}-5\cdot 2^{2009} \\
\equiv&(20090-5)2^{2009} \\
\equiv&20085\cdot 2^{2009} \\
\equiv&85\cdot 2^{2009} \\
\equiv&17\times 5\times 2^{2009} \\
\equiv&17\times 2^{2008}\times 10
\end{aligned}$$

したがって，17×2^{2008} の一の位の数字が分かればよい．2^n の一の位の数字は 2，4，8，6 を周期 4 で循環するので，2^{2008} の一の位の数字は 6．

よって，17×2^{2008} の一の位の数字は 2 となり，$4\cdot 3^{2009}+(-2)^{2009}$ の下二桁の数字が 20 となることが分かる．

以上より，$a_{2010} = \dfrac{4\cdot 3^{2009}+(-2)^{2009}}{5}$ の一の位の数字は 4 となる．

注　2^n の一の位が周期 4 ということは証明なしでも構わないでしょう．もしやるなら

$$2^{n+4}-2^n \equiv 2^n(2^4-1) \equiv 2^n\times 15 \equiv 0 \pmod{10}$$

いずれにせよ，(1) は試験時間内に証明することは無理でしょう．20 個を書き出して「周期が 20 だから」で終えて他の問題に専念する方が無難です．