2010 年前期

実数 p，q，r に対して，3 次多項式 $f(x)$ を $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ と定める．実数 a，c および 0 でない実数 b に対して，$a+bi$ と c はいずれも方程式 $f(x)=0$ の解であるとする．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) $y=f(x)$ のグラフにおいて，点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし，点 $(c,\ f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする．$a \neq c$ のとき，$s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ．

(2) さらに，a，c は整数であり，b は 0 でない整数であるとする．次を証明せよ．

(i) p，q，r はすべて整数である．

(ii) p が 2 の倍数であり，q が 4 の倍数であるならば，a，b，c はすべて 2 の倍数である．

考え方　(1) の $S(a)$ と $s(c)$ は簡単に求められると思います．大小比較ですから，差 $s(a)-s(c)$ を考えるでしょう．その差の式が，どの文字で構成されているか，がポイントになると思います．(2) もそうですが，a，b，c(つまり解) と p，q，r(つまり係数) の関係がテーマになっているようです．ということは，使うネタとしてはアレしかありませんね．

「微積分と整数問題の融合問題か？」と一瞬身構えますが，本当に一瞬だけだということに気づくでしょう (笑)．やってることは，いずれもド定番の手法です．(2) なんて，類題がこれまでに何度も出題されてきました．

解

(1)　実数係数の 3 次方程式 $f(x)=0$ の解が $a+bi$ と c であるとき，残りの解は $a-bi$ であるので，解と係数の関係より

$$\begin{cases}(a+bi)+(a-bi)+c=-p\\(a+bi)(a-bi)+(a-bi)c+c(a+bi)=q\\(a+bi)(a-bi)c=-r\end{cases}$$

よって

$$\begin{cases}2a+c=-p & \cdots\cdots①\\a^2+b^2+2ac=q & \cdots\cdots②\\(a^2+b^2)c=-r & \cdots\cdots③\end{cases}$$

また，

$s(a)=f'(a)=3a^2+2pa+q$

$s(c)=f'(a)=3c^2+2pc+q$

であるので，

$$\begin{aligned}&s(a)-s(c)\\=&3(a^2-c^2)+2p(a-c)\\=&(a-c)\{3(a+c)+2p\}\\=&(a-c)\{3(a+c)-2(2a+c)\}\ (\because ①)\\=&(a-c)(c-a)\\=&-(a-c)^2<0\end{aligned}$$

$$\therefore\ s(a)<s(c)$$

(2)

(i) について

①，②，③ より，

$$p=-(2a+c)$$

$$q=a^2+b^2+2ac$$

$$r=-(a^2+b^2)c$$

なので，a，b，c が整数ならば，p，q，r も整数である．よって，(i) は証明された．

(ii) について

p が 2 の倍数のとき，$p=2m$ とおくと，① より

$$c=-2a-p=-2a-2m=2(-a-m)$$

なので，c は 2 の倍数である．

② より，

$$a^2+b^2=q-2ac$$

c が 2 の倍数であることから $2ac$ は 4 の倍数．よって q が 4 の倍数ならば，a^2+b^2 も 4 の倍数になる．

a も b も奇数のとき

$a=2k+1$，$b=2l+1$ とすると

$$a^2+b^2=(2k+1)^2+(2l+1)^2=4(k^2+k+l^2+l)+2$$

なので，4 の倍数にならない．

a と b の一方が奇数で一方が偶数のとき

$a=2k+1$，$b=2l$ とすると

$$a^2+b^2=(2k+1)^2+(2l)^2=4(k^2+k+l^2)+1$$

なので，4 の倍数にならない．

よって，a^2+b^2 が 4 の倍数になるのは，a も b も偶数のときである．

以上より，a，b，c はすべて 2 の倍数であるので，(ii) は証明された．

■

注　(ii) の証明の根底にあるのは，「平方数を 4 で割った余りは 0 か 1 である」という有名事実です．したがって，平方数の和 a^2+b^2 が 4 の倍数になるのは，a^2 と b^2 それぞれが 4 で割って余りが 0 のときに限られる，つまり，a も b も偶数である，となるのです．

注　3 次方程式が虚数解をもつ問題は 2007 年前期でも出題されています．実数係数の方程式が $a+bi$ を解にもつとき，その共役な複素数 $a-bi$ も解にもちます．「実数係数だから」という理由が重要なので，必ず答案に書こう．なお，$f(a+bi)=0$ より，(実部) $=0$，(虚部) $=0$ という手法もありますが，今回はやめた方がいいでしょう．

注　結局，式 ③ はほとんど使いませんでしたね．