2011 年前期

(1) 自然数 x，y は，$1<x<y$ および $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$ をみたす．x，y の組をすべて求めよ．

(2) 自然数 x，y，z は，$1<x<y<z$ および $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$ をみたす．x，y，z の組をすべて求めよ．

考え方 (1) は，おそらく大多数の人が，式変形して積の形を作って解いたと思いますが (✎注)，この方法では (2) に対応できません．なので，(2) でも対応できる方法で解いてみたいと思います．式の対称性や大小関係から，不等式で範囲を絞り込みましょう (参考)．なお，(2) の後半は，さすがに不等式で範囲を絞り込む方法を繰り返すのはメンドウなので，積の形に変形して解きます．

解

(1) $1<x<y$ より，$1>\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$

よって，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)<\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore\ \frac{5}{3}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$$

$x=2$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>\frac{5}{3}$$

よって，適する．

$x=3$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}>\frac{5}{3}$$

よって，適する．

$x\geqq 4$ のとき，$\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{4}$ なので

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\leqq\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}<\frac{5}{3}$$

よって，$x\geqq 4$ のとき，不適．

$$\therefore\ x=2,\ 3$$

$x=2$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

$$\therefore\ y=9\quad(2<y\text{ に適する})$$

$x=3$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

$$\therefore\ y=4\quad(3<y\text{ に適する})$$

よって，

$$(x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)$$

(2) $1<x<y<z$ より，$1>\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{z}$

よって，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)<\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore\ \frac{12}{5}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$$

$x=2$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}>\frac{12}{5}$$

よって，適する．

$x\geqq 3$ のとき，$\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{3}$ なので

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\leqq\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}<\frac{12}{5}$$

よって，$x\geqq 3$ のとき，不適．

$$\therefore\ x=2$$

$x=2$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}$$

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{8}{5}$$

$$\frac{(y+1)(z+1)}{yz}=\frac{8}{5}$$

$$5(y+1)(z+1)=8yz$$

$$3yz-5y-5z-5=0$$

$$9yz-15y-15z-15=0$$

$$(3y-5)(3z-5)=40$$

$2<y<z$ より，$-1<3y-5<3z-5$ なので，

$3y-5$	1	2	4	5
$3z-5$	40	20	10	8

これらを解いて，$2<y<z$ となるものを選ぶと，$y=3,\ z=5$.

$$\therefore\ (x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)$$

■

✎注 (1) を (2) の後半のように積の形に変形して解いてみよう．

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$ より

$$\frac{(x+1)(y+1)}{xy}=\frac{5}{3}$$

$$3(x+1)(y+1)=5xy$$

$$2xy-3x-3y-3=0$$

$$4xy-6x-6y-6=0$$

$$(2x-3)(2y-3)=15$$

$1<x<y$ より，$-1<2x-3<2y-3$ なので，

$2x-3$	1	3
$2y-3$	15	5

これらを解いて，$1<x<y$ となるものを選ぶと，

$$\therefore\ (x,\ y)=(2,\ 9),\ (3,\ 4)$$

✎注 なぜ，(1) で「$x=2,\ 3$ と調べて，$x \geqq 4$ で不適になる」という答案になったのか分かりますか．これは，$x=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ と実験して調べた結果なんですよ．「あっ，$x \geqq 4$ のときダメそう…」と気づくはず．だから，解 のような答案になっているのです．いきなり，「$x \geqq 4$ で不適になる」が出てきたわけではありません．(2) も同様．実験の結果，「$x=2$ はいけるけど，$x \geqq 3$ のときはダメそうだ」と気づくからなのです．

参考

> $a,\ b,\ c$ が $a>b>c>1$ をみたす整数のとき
>
> $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$
>
> となる $a,\ b,\ c$ は？

という問題を解いたことあるでしょう．ほとんど同じです．