2012 年後期

$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

$$\log_2(4\sin^2\theta + 3\cos\theta - 4), \quad \log_2(-4\cos^3\theta + 3\cos\theta + 1)$$

がともに整数となるような θ の値をすべて求めよ．

考え方 三角関数，対数関数と整数問題の融合ですが，実質的に，三角関数のウエイトが大きいです．問題を見てすぐに，それぞれの真数部分が $2^{(整数)}$ の形になればよいことに気づくと思います (この (整数) は負の整数の場合も含みます！)．で，真数部分が三角関数になっており，その三角関数のとりうる値に注目することになります．

たとえば，「$y = 4\sin^2\theta + 3\cos\theta - 4$ のとりうる値の範囲を求めよ」という問題を解いたことがあると思います．$\cos\theta = t$ とおいて t の 2 次関数に変形しますよね．この場合，上に凸の 2 次関数になるので本来ならば最小値は存在しませんが，t に条件 (範囲) があるので，最大値と最小値が確定します．最大値と最小値の間にあって値が $2^{(整数)}$ となる個所を探せばよいのです．「あー，ほとんど三角関数の問題やん」って思ったあなた，何か忘れていませんか？

解 (真数) > 0 より

$$4\sin^2\theta + 3\cos\theta - 4 > 0 \quad \cdots①$$

$$-4\cos^3\theta + 3\cos\theta + 1 > 0 \quad \cdots②$$

① について，

$$4(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 4 > 0$$

$$4\cos^2\theta - 3\cos\theta < 0$$

$$\cos\theta(4\cos\theta - 3) < 0$$

$$0 < \cos\theta < \frac{3}{4} \quad \cdots①'$$

② について，

$$-4\cos^3\theta + 3\cos\theta + 1 > 0$$

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta - 1 < 0$$

$$(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1)^2 < 0$$

$$\cos\theta < -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} < \cos\theta < 1 \quad \cdots②'$$

①′ かつ ②′ より，真数条件は

$$0 < \cos\theta < \frac{3}{4}$$

次に，

$$y_1 = 4\sin^2\theta + 3\cos\theta - 4$$

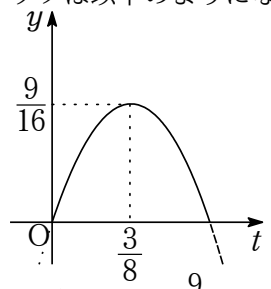
$$y_2 = -4\cos^3\theta + 3\cos\theta + 1$$

の，$0 < \cos\theta < \frac{3}{4}$ のときの，とりうる値の範囲を調べる．

$\cos\theta = t$ とおくと

$$y_1 = -4t^2 + 3t \quad \left(0 < t < \frac{3}{4}\right)$$

y_1 のグラフは以下のようになる．



よって，$0 < y_1 \leqq \frac{9}{16}$

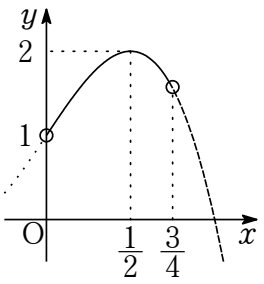
次に，

$$y_2 = -4t^3 + 3t + 1 \quad \left(0 < t < \frac{3}{4}\right)$$

$$y_2' = -12t^2 + 3 = -12\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$0 < t < \frac{3}{4}$ における増減は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	↗	2	↘	$\frac{25}{16}$



よって，

$$1 < y_2 \leqq 2$$

さて，

$$0 < y_1 \leqq \frac{9}{16}, \qquad 1 < y_2 \leqq 2$$

において，$\log_2 y_1$ が整数になる y_1 は無数に存在するが，$\log_2 y_2$ が整数になる y_2 は，$y_2 = 2$ のときだけである．

$y_2 = 2$ なるのは $t = \dfrac{1}{2}$ のときであり，このとき，$y_1 = \dfrac{1}{2}$ なので，$\log_2 y_1$ も整数になる．

したがって，$\log_2 y_1$ と $\log_2 y_2$ がともに整数になるのは $t = \dfrac{1}{2}$ のときのみである．よって，求める θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

■