2012 年前期

1 つの角が 120° の三角形がある．この三角形の 3 辺の長さ x，y，z は $x<y<z$ を満たす整数である．

(1) $x+y-z=2$ を満たす整数 x，y，z の組をすべて求めよ．
(2) $x+y-z=3$ を満たす整数 x，y，z の組をすべて求めよ．
(3) a，b を 0 以上の整数とする．$x+y-z=2^a3^b$ を満たす整数 x，y，z の組の個数を a と b の式で表せ．

考え方　三角形の 1 つの角度が 120° のとき，この角度が最大なので，120° に向かい合う辺は最大辺の z になることは分かると思います．となると，余弦定理を使いたくなるでしょう．

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ$$
$$z^2=x^2+y^2+xy$$

(1) と (2) は，問題文の条件式とこの式を合わせて考えることになります．まあ，式の雰囲気的に z を消去したくなると思います．すると，うまく因数分解できます．しかし，ここで少し注意する必要があります．例えば，(1) の場合，因数分解すると

$$(x-4)(y-4)=12$$

となります．もしこれが

$$(x+4)(y+4)=12$$

なのであれば，明らかに $x+4>0$，$y+4>0$ なので，12 の正の約数のみを考えれば良いですが，今回の場合，$x-4>0$，$y-4>0$ とは限らず，$x-4<0$，$y-4<0$ になる可能性があります．この部分を吟味する必要がありますね．

(3) は，途中までは (1) や (2) と全く同じように進んでいきます．問題は最後の部分です．(1) と (2) の結果から，なんとなく予想できないでしょうか？

解　三角形の最大角の大きさが 120° なので，その対辺が z である．よって，余弦定理より

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ$$
$$z^2=x^2+y^2+xy \quad \cdots ①$$

(1) $z=x+y-2$ を ① に代入して

$$(x+y-2)^2=x^2+y^2+xy$$
$$x^2+y^2+4+2xy-4y-4x=x^2+y^2+xy$$
$$xy-4x-4y+4=0$$
$$(x-4)(y-4)=12$$

ここで $x-4<0$ とすると，$y-4<0$．
$0<x<y<x+y-2$ と合わせて考えると

$$2<x<4,\quad 2<y<4$$
$$-2<x-4<0,\quad -2<y-4<0$$

なので

$$(x-4)(y-4)<4$$

つまり，$(x-4)(y-4)=12$ になることはない．
よって，$x-4>0$，$y-4>0$ である．

$x-4$	1	2	3
$y-4$	12	6	4

$$(x,\ y)=(5,\ 16),\ (6,\ 10),\ (7,\ 8)$$

$z=x+y-2$ より，

$$(x,\ y,\ z)=(5,\ 16,\ 19),\ (6,\ 10,\ 14),\ (7,\ 8,\ 13)$$

(2) $z=x+y-3$ を ① に代入して

$$(x+y-3)^2=x^2+y^2+xy$$
$$x^2+y^2+9+2xy-6y-6x=x^2+y^2+xy$$
$$xy-6x-6y+9=0$$
$$(x-6)(y-6)=27$$

ここで $x-6<0$ とすると，$y-6<0$．

$0 < x < y < x+y-3$ と合わせて考えると

$$3 < x < 6, \quad 3 < y < 6$$
$$-3 < x-6 < 0, \quad -3 < y-6 < 0$$

なので

$$(x-6)(y-6) < 9$$

つまり，$(x-6)(y-6) = 27$ になることはない．
よって，$x-6 > 0$，$y-6 > 0$ である．

$x-6$	1	3
$y-6$	27	9

$$(x,\ y) = (7,\ 33),\ (9,\ 15)$$

$z = x+y-3$ より，

$$(x,\ y,\ z) = (7,\ 33,\ 37),\ (9,\ 15,\ 21)$$

(3) $2^a3^b = N$ とおく．
$z = x+y-2^a3^b = x+y-N$ を ① に代入して

$$(x+y-N)^2 = x^2+y^2+xy$$
$$x^2+y^2+N^2+2xy-2Ny-2Nx = x^2+y^2+xy$$
$$xy-2Nx-2Ny+N^2 = 0$$
$$(x-2N)(y-2N) = 3N^2 \quad \cdots ②$$

ここで $x-2N < 0$ とすると，$y-2N < 0$．
$0 < x < y < x+y-N$ と合わせて考えると

$$N < x < 2N, \quad N < y < 2N$$
$$-N < x-2N < 0, \quad -N < y-2N < 0$$

なので

$$(x-2N)(y-2N) < N^2$$

つまり，$(x-2N)(y-2N) = 3N^2$ になることはない．
よって，$x-2N > 0$，$y-2N > 0$ である．
すなわち，② において

$$0 < x-2N < y-2N \quad \cdots (※)$$

をみたす $(x,\ y)$ を求めればよく，この $(x,\ y)$ に対して，$z = x+y-N$ より，整数 z も必ず定まる．
② の右辺 $3N^2$ は平方数ではないので，条件 (※) を満たす $x-2N$，$y-2N$ の組み合わせの総数は，$3N^2$ の約数の個数のちょうど半分である．
$3N^2 = a^{2a}b^{2b+1}$ より，$3N^2$ の約数の個数は

$$(2a+1)(2b+2)\text{ 個}$$

つまり，$(x,\ y,\ z)$ の解の組の個数は

$$\frac{(2a+1)(2b+2)}{2} = (2a+1)(b+1)\text{ 個}$$

■

✎注 (3) で，$a=1$，$b=0$ とした場合が (1) で，$a=0$，$b=1$ とした場合が (2) です．(3) の結果に当てはめると，確かに，3 個，2 個となり一致しています．この確認は必ずしておこう．