2013 年後期

(1) 正の実数 $x$, $y$, $z$ が $x^2 = y^2 + z$ を満たすとき, $y < x < y + \dfrac{z}{2y}$ が成り立つことを示せ.

(2) $x^2 = y^2 + 8\sqrt{2y-1}$ を満たす正の整数 $x$, $y$ の組をすべて求めよ.

考え方 (1) は単なる不等式の証明問題です. 特に問題ないでしょう. (2) は, (1) との流れを考えると, $z = 8\sqrt{2y-1}$ と置くことは見え見えですね. すると, 次のような不等式が登場すると思います.

$$y < x < y + \frac{8\sqrt{2y-1}}{2y}$$

他にネタがないので, この不等式だけから $x$ や $y$ を決定せねばなりません. そんなことできるのでしょうか. 注目すべきは $\dfrac{8\sqrt{2y-1}}{2y}$ の部分です. この部分をどのように解釈するのかがポイントです.

この (2) は, 様々な別解が考えられるので, なかなかの良問だと思います.

解

(1) $x^2 = y^2 + z$ より

$$z = (x+y)(x-y)$$

$z > 0$, $x + y >$ より, $x - y > 0$. $\therefore\ x > y$.

$y > 0$ より

$$x < y + \frac{z}{2y} \iff 2xy < 2y^2 + z$$

よって, $2xy < 2y^2 + z$ を証明する.

$$\begin{aligned}&(2y^2+z) - 2xy\\ =&2y^2 + (x^2 - y^2) - 2xy\\ =&x^2 + y^2 - 2xy\\ =&(x-y)^2 > 0\ (\because\ \ x > y)\end{aligned}$$

$\therefore\ \ 2xy < 2y^2 + z$.

すなわち, $x < y + \dfrac{z}{2y}$.

以上より,

$$y < x < y + \frac{z}{2y}$$

が成立する.

(2) $y$ が正の整数なので, $8\sqrt{2y-1} > 0$

したがって, $z = 8\sqrt{2y-1}$ とおくと, $x$, $y$, $z$ は (1) の条件をみたしているので, (1) の不等式が成立する

$$y < x < y + \frac{8\sqrt{2y-1}}{2y}$$

ここで, $y \geqq 1$ より,

$$\frac{8\sqrt{2y-1}}{2y} < \frac{8\sqrt{2y}}{2y} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \leqq 4\sqrt{2}$$

よって,

$$y + \frac{8\sqrt{2y-1}}{2y} < y + 4\sqrt{2}$$

なので

$$y < x < y + 4\sqrt{2}$$

$5 < 4\sqrt{2} < 6$ であり, $x$ と$y$ は正の整数なので,

$$x = y+1,\ y+2,\ y+3,\ y+4,\ y+5$$

のいずれかである.

いま, $x^2 = y^2 + 8\sqrt{2y-1}$ なので, $x^2 - y^2$ は偶数. すなわち, $x$ と $y$ の偶奇性は一致する. つまり,

$$x = y+2,\ y+4$$

のいずれかの場合であることが分かる.

(i) $x = y + 2$ のとき

$$\begin{aligned}&(y+2)^2 = y^2 + 8\sqrt{2y-1}\\ &4y + 4 = 8\sqrt{2y-1}\\ &y + 1 = 2\sqrt{2y-1}\end{aligned}$$

両辺は正なので, 両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned}&(y+1)^2 = 4(2y-1)\\ &y^2 - 6y + 5 = 0\\ &(y-1)(y-5) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad y = 1,\ 5$$

これらは共に適する

$y = 1$ のとき，$x = 3$

$y = 5$ のとき，$x = 7$

(ii) $x = y + 4$ のとき

$$(y+4)^2 = y^2 + 8\sqrt{2y-1}$$

$$8y + 16 = 8\sqrt{2y-1}$$

$$y + 2 = \sqrt{2y-1}$$

両辺は正なので，両辺を 2 乗すると

$$(y+2)^2 = (2y-1)$$

$$y^2 + 2y + 5 = 0$$

$$(y+1)^2 + 4 = 0$$

よって，これを満たす実数 $y$ は存在しない．

(i)(ii) より

$$(x,\ y) = (3,\ 1),\ (7,\ 5)$$

■

**注** (2) で，不等式で評価する部分は次のようにやっても良いでしょう．

$$\frac{8\sqrt{2y-1}}{2y} = 4\sqrt{\frac{2y-1}{y^2}} = 4\sqrt{-\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y}}$$

$\dfrac{1}{y} = t$ とおくと，$0 < t \leqq 1$ であり，根号内が $t$ の 2 次関数 $f(t) = -t^2 + 2t = -(t-1)^2 + 1$ なので，$t = 1$ のとき最大値 1.

$$\therefore \quad \frac{8\sqrt{2y-1}}{2y} \leqq 4$$

よって，

$$y < x < y + \frac{8\sqrt{2y-1}}{2y} \leqq y + 4$$

$x$ と $y$ は正の整数なので，

$$x = y+1,\ y+2,\ y+3$$

のいずれかである．この中で，偶奇性が一致するのは

$$x = y + 2$$

のみである (以下略).

この解法の方が，$x$ の候補が少なく絞り込めていますが，根号内が $\dfrac{1}{y}$ の 2 次関数になることに，すぐには気づかないですね．上の 解 の方がシンプルです．

**注** (2) は次のようにもできます．

$$y < x < y + \frac{8\sqrt{2y-1}}{2y}$$

なので，この不等式をみたす整数 $x$ が存在するには

$$\frac{8\sqrt{2y-1}}{2y} > 1$$

であることが必要．つまり

$$4\sqrt{2y-1} > y$$

両辺は正なので，2 乗して整理すると

$$y^2 - 32y + 16 < 0 \quad \cdots (*)$$

$$16 - 4\sqrt{15} < y < 16 + 4\sqrt{15}$$

$y \geqq 1$ より

$$1 \leqq y < 16 + 4\sqrt{15} < 32$$

$1 \leqq y \leqq 31$ のなかで，$\sqrt{2y-1}$ が整数になる $y$ を選ぶと，$1 \leqq 2y - 1 \leqq 61$ なので，この範囲に含まれる平方数は

$$2y - 1 = 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49$$

このうち，$y$ が整数になるのは

$$y = 1,\ 5,\ 13,\ 25$$

$x^2 = y^2 + 8\sqrt{2y-1}$ に代入して，正の整数 $x$ が確定する $y$ を選べば良い (以下略).

手間ではありますが，一つ一つ候補を絞って考えています．この解法は $(*)$ の不等式が $< 0$ になっているから成功したのであって，$> 0$ ならば破綻します．なので，たまたま上手くいった解法であると言わざるを得ません．