2013 年前期

$3p^3-p^2q-pq^2+3q^3=2013$ を満たす正の整数 p，q をすべて求めよ．

考え方 左辺部分を見て「因数分解できる」と気づくと思います．2013 も素因数分解できるので，やることは決まってくるのですが，まともに全パターンを調べるのは結構大変です．無駄を省いて，要領よくやりましょう．

解

$$3p^3-p^2q-pq^2+3q^3=2013$$

$$3(p^3+q^3)-pq(p+q)=2013$$

$$3(p+q)(p^2-pq+q^2)-pq(p+q)=2013$$

$$(p+q)(3p^2-4pq+3q^2)=2013$$

ここで，$p+q$ と $3p^2-4pq+3q^2$ の大小を考えると

$$\begin{aligned}&3p^2-4pq+3q^2-(p+q)\\&=3(p-q)^2+2pq-p-q\\&=3(p-q)^2+pq-p+pq-q\\&=3(p-q)^2+p(q-1)+q(p-1)\\&\geqq 0\quad(\because\ p\geqq 1,\ q\geqq 1)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad p+q\leqq 3p^2-4pq+3q^2$$

よって，$2013=3\times 11\times 61$ であり，p と q は正の整数なので，$p+q\geqq 2$ であることから，$p+q$ として考えられるのは

$$p+q=3,\ 11,\ 33$$

の 3 通りである．

(i) $p+q=3$ のとき，

$$3p^2-4pq+3q^2=11\times 61$$

$$3(p+q)^2-10pq=671$$

$$27-10pq=671$$

$$10pq=-644$$

$pq>0$ より不適．

(ii) $p+q=11$ のとき，

$$3p^2-4pq+3q^2=3\times 61$$

$$3(p+q)^2-10pq=183$$

$$363-10pq=183$$

$$pq=18$$

$$\therefore\ (p,\ q)=(2,\ 9),(9,\ 2)$$

(iii) $p+q=33$ のとき，

$$3p^2-4pq+3q^2=61$$

$$3(p+q)^2-10pq=61$$

$$3267-10pq=61$$

$10pq=3206$．よって，不適．

(i)(ii)(iii) より，

$$(p,\ q)=(2,\ 9),(9,\ 2)$$

■

注 もし，$p+q$ と $3p^2-4pq+3q^2$ の大小を考えずに，全パターンを調べようとすると

$p+q$	$3p^2-4pq+3q^2$
3	11×61
11	3×61
61	3×11
3×11	61
11×61	3
3×61	11
$3\times 11\times 61$	1

の 7 通りを調べることになりますが，さすがに現実的ではありませんね．「こんな単純作業をさせるわけない．きっと何かあるはずだ．とりあえず大小を調べてみよう．パッと見，$3p^2-4pq+3q^2$ の方が大きそうだぞ」と考えてほしいものです．