2014 年後期

$(2\times3\times5\times7\times11\times13)^{10}$ の 10 進法での桁数を求めよ．

考え方 「桁数の問題なのに，常用対数の値がない」と思った人も多いでしょう．確かに，$\log_{10}2$, $\log_{10}3$, …，$\log_{10}13$ の値が書いてあったら，簡単に桁数が求められると思います (実はそうでもない．✎注 参照)

今回は常用対数の値が与えられていません．どうすれば良いのでしょうか．

$$\text{整数 } N \text{ が } n \text{ 桁} \iff 10^{n-1} \leqq N < 10^n$$

なので，ようするに，$(2\times3\times5\times7\times11\times13)^{10}$ がだいたい 10 の何乗の範囲内にあるのかを調べることになります．とりあえず，(　　) 内部を計算してみると・・・・なんと，$7\times11\times13$ の値が・・・・

解 $(2\times3\times5\times7\times11\times13)^{10}=N$ とおく．

$$N=(3\times10\times1001)^{10}=3^{10}\times10^{10}\times1001^{10}$$

$3^{10}=59049$ なので，1001^{10} について調べる．

二項定理より

$$\begin{aligned}
&(1001)^{10}\\
=&(10^3+1)^{10}\\
=&(10^3)^{10}+{}_{10}C_1(10^3)^9+{}_{10}C_2(10^3)^8+{}_{10}C_3(10^3)^7+{}_{10}C_4(10^3)^6\\
&\qquad+{}_{10}C_5(10^3)^5+{}_{10}C_6(10^3)^4+{}_{10}C_7(10^3)^3+{}_{10}C_8(10^3)^2+{}_{10}C_9 10^3+1\\
=&10^{30}+10\cdot10^{27}+45\cdot10^{24}+120\cdot10^{21}+210\cdot10^{18}+252\cdot10^{15}+210\cdot10^{12}+120\cdot10^{9}+45\cdot10^{6}+10\cdot10^{3}+1\cdots(※)
\end{aligned}$$

式 (※) の第 3 項以降は全て $10\cdot10^{27}$ よりも小さいので，すべて $10\cdot10^{27}$ で置き換えて

$$\begin{aligned}
<&10^{30}+10\cdot10^{27}+10\cdot10^{27}+10\cdot10^{27}+10\cdot10^{27}+10\cdot10^{27}+10\cdot10^{27}+10\cdot10^{27}+10\cdot10^{27}+10\cdot10^{27}+10\cdot10^{27}\\
=&10^{30}+10\times10\cdot10^{27}\\
=&10^{30}+10^{29}\\
=&10^{30}+0.1\times10^{30}\\
=&1.1\times10^{30}
\end{aligned}$$

$$10^{30}<(1001)^{10}<1.1\times10^{30}$$

$$3^{10}\times10^{10}\times10^{30}<N<3^{10}\times10^{10}\times1.1\times10^{30}$$

$$59049\times10^{40}<N<64953.9\times10^{40}$$

よって，N は 45 桁である．

■

✎注 $7\times11\times13=1001$ になることが最大のポイントでした．このことに気づけば何とかなるでしょうが，そもそも「とりあえず中身をかけてみよう」と思うかどうか・・・・気づいたとしてもその後の処理をどうやるのか分からない，シンプルだが相当な難問だと思います．

参考 ちなみに常用対数表を用いて桁数を求めてみましょう．常用対数の表によると，常用対数の値は以下のようになります．

$$\log_{10}2=0.3010$$

$$\log_{10}3=0.4771$$

$$\log_{10}5=1-\log_{10}2=0.6990$$

$$\log_{10}7=0.8451$$

$$\log_{10}11=1+\log_{10}1.1=1.0414$$

$$\log_{10}13=1+\log_{10}1.3=1.1139$$

よって，

$$\begin{aligned}&\log_{10}(2\times3\times5\times7\times11\times13)^{10}\\&=10\log_{10}(2\times3\times5\times7\times11\times13)\\&=10(\log_{10}2+\log_{10}3+\cdots+\log_{10}13)\\&=44.775\quad\cdots(※)\end{aligned}$$

$$44\leqq\log_{10}(2\times3\times5\times7\times11\times13)^{10}<45$$

$$10^{44}\leqq(2\times3\times5\times7\times11\times13)^{10}<10^{45}$$

$\therefore$　$(2\times3\times5\times7\times11\times13)^{10}$は 45 桁

しかしながら，この解法には大きな問題があります．

それは，常用対数表に掲載されている常用対数の値自体が近似値だからです．常用対数を 1 個か 2 個足す程度なら，それほど誤差も生じないかもしれませんが，今回は 6 個足しています．近似値を 6 個も足すと誤差はかなりなもんです．なので，（※）の値も正確かどうか疑わしい．つまり，（※）の値だけから 45 桁であると判断するのは非常に危険だと思います．そういう意味でも，今回の問題は，「常用対数を用いずに」桁数を求めることの意味があると思います．