2014 年前期

$a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ.

考え方　シンプルな良問です．2005 年後期でも類題が出題されていて，2005 年の模範解答で以下の文章を載せました．再掲します．

「京大，阪大，早稲田など，類題を上げたらキリがない定番問題です．「素数を求めよ」ということですが，大学院で素数や整数を研究していた私に言わせると，素数の秘密は世界中の数学者の頭脳を結集しても分からないことが多く，高校生の分際で素数を求めるなんておこがましいと言わざるを得ません．ということは，高校生のレベルで見つけられる素数なんて「すぐ近くに転がっている」はず．なので，とにかく実験して素数を見つけ，規則性を予測し証明する，という流れが基本です．

▷Point◁

＜素数に関する問題のアプローチ＞
実験して予想する．
その予想が正しいことを証明する

(1) をやってみます．とにかく実験して，予想.」

このアプローチに従って，2005 年の問題はいろいろ実験して予想したわけですが，この問題は文字が 1 個だけだったので，簡単に実験できましたが，今回は文字が 3 個もあるので，実験しようにも大変です．実験する前に，候補をある程度絞り込む必要があります．

そのためのポイントになるのが，

▷Point◁

＜素数に関する問題のアプローチ＞
素数の中で 2 は特別扱いである

ということです．ご存知の通り，素数は無数にありますが，2 だけが偶数で，他はすべて奇数です．この，一見当たり前の事実が効果を発揮することが多いのです．

解

(i)　$a,\ b,\ c$ がすべて奇素数のとき

$a-b-8$ と $b-c-8$ は共に偶数であり，偶数の素数は 2 だけなので

$$a-b-8=2, \qquad b-c-8=2$$

$$\therefore\ a=b+10, \qquad c=b-10$$

よって，$b-10,\ b,\ b+10$ がすべて素数になる b を求めればよい．

$b-10 \geqq 2$ で b は奇素数なので，b の最小値は $b=13$ である．

$b=13$ のとき

$$(b-10,\ b,\ b+10)=(3,\ 13,\ 23)$$

なので全て素数である．

$b>13$ のとき

$b=3k+1$ ならば，$b-10=3k-9=3(k-3)$ となり，$b-10$ が 3 より大きい 3 の倍数なので素数ではない．

$b=3k+2$ ならば，$b+10=3k+12=3(k+4)$ となり，$b+10$ が 3 より大きい 3 の倍数なので素数ではない．

したがって，$b-10,\ b,\ b+10$ がすべて素数になる b は $b=13$ のみである．

$$(a,\ b,\ c)=(23,\ 13,\ 3)$$

(ii)　$a,\ b,\ c$ の中に偶素数 2 を含むとき

$a-b-8$ と $b-c-8$ は素数なので

$$a-b-8 \geqq 2, \qquad b-c-8 \geqq 2$$

$$a \geqq b+10, \qquad b \geqq c+10$$

なので，a と b が偶素数 2 になることはない．よって，$a,\ b,\ c$ の中に偶素数 2 を含むとすれば，それは c である．

つまり，a と b が奇素数として，$a-b-8$ と $b-10$ が共に素数になる場合を考える．

このとき，$a-b-8$ は偶数の素数なので

$$a-b-8=2$$

$$\therefore\ a=b+10$$

よって，$b+10$ と $b-10$ がともに素数になる奇素数 b を求めればよく，このような b は (i) の結果より，$b=13$ である．したがって，

$$(a,\ b,\ c)=(23,\ 13,\ 2)$$

(i)(ii) より，求める $(a,\ b,\ c)$ の組は

$$(a,\ b,\ c)=(23,\ 13,\ 2),\ (23,\ 13,\ 3)$$

■

注 (i) で，$b-10$，b，$b+10$ がすべて素数になる b を求める際に，3 で割った余りで分類している理由は，以下のように実験した結果，$b-10$ と $b+10$ のいずれか一方が必ず 3 の倍数になっていると予想できるからです．

$b-10$	b	$b+10$	
3	13	23	○
7	17	27	×
9	19	29	×
13	23	33	×
19	29	39	×
21	31	41	×

参考 「素数は 2 は特別」という例として，2 問紹介しておこう．

> p，q，$p+q$，$p-q$ がすべて素数になる p，q を求めよ．(大昔の代ゼミの京大プレ)

p も q も奇素数ならば，$p+q$ と $p-q$ は偶数になる．偶素数は 2 だけだから

$$p+q=2 \quad \text{かつ} \quad p-q=2$$

となるが，これは矛盾．よって，$p-q>0$ を考慮すると，$q=2$ と確定する．

つまり，$p-2$，p，$p+2$ がすべて素数になる p を求めればよい．以下，実験して予想し，証明する (省略)．

> 素数 p，q を用いて，p^q+q^p と表される素数をすべて求めよ．(2016 年京大理系)

式の対称性から $p \leqq q$ とおいても一般性を失わない．

このとき，p も q も奇素数とすると p^q+q^p は偶数であり，偶数の素数は 2 だけなので，$p^q+q^p=2$．しかし，$2 \leqq p \leqq q$ より矛盾．つまり，$p=2$ と確定する．

よって，2^q+q^2 が素数になる素数 q を求めればよい．以下，実験して予想し，証明する (省略)．