2015 年後期

p, q を実数とする．2 次関数 $f(x) = x^2 - px + 108q$ のグラフ $y = f(x)$ が直線 $12x + 4y + 9 = 0$ と接している．2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの整数解を持つならば，q は 0 以上の整数であることを証明せよ．

考え方　まず，p と q が実数であることに注意してください．整数かどうかは分からないのです．$f(x) = 0$ の 2 つの整数解を α，β とおくと，解と係数の関係より，

$$\alpha + \beta = p, \qquad \alpha\beta = 108q$$

なので，p が整数になることはすぐに分かりますが，q が整数になるのかはまだ分かりません．

さて，「放物線と直線が接する」とくれば，当然，判別式 $D = 0$ です．ここから p と q の関係式が得られるので，この関係式をうまく利用します．

あとは「$f(x) = 0$ が異なる 2 つの整数解を持つ」をどう定式化するかです．

解

2 次関数 $y = x^2 - px + 108q$ のグラフと直線 $12x + 4y + 9 = 0$ が接するので，2 つの式を連立してできる x の 2 次方程式が重解をもつ．

$$12x + 4(x^2 - px + 108q) + 9 = 0$$
$$4x^2 + (12 - 4p)x + 432q + 9 = 0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = (6 - 2p)^2 - 4(432q + 9) = 0$$
$$p^2 - 6p - 432q = 0 \quad \cdots ①$$

次に $f(x) = 0$ の 2 つの整数解を α，β とおくと，解と係数の関係より，

$$\alpha + \beta = p, \qquad \alpha\beta = 108q$$

なので，p は整数である．

いま，

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 432q}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{6p}}{2} \quad (\because ①)$$

なので，これが異なる 2 つの整数になるためには，根号内が正の平方数になる必要がある．p は整数であり，$6 = 2 \times 3$ なので，

$$p = 6k^2 \quad (k \text{ は正の整数})$$

とおける．このとき，$x = \dfrac{6k^2 \pm 6k}{2} = 3(k^2 \pm k)$ で，これは整数なので十分である．

① より

$$q = \frac{p^2 - 6p}{432} = \frac{36k^4 - 36k^2}{432}$$
$$= \frac{k^2(k^2 - 1)}{12} = \frac{k^2(k+1)(k-1)}{12}$$

まず，k は正の整数なので $q \geqq 0$

次に，この (分子) に注目する．

(分子) $= k^2(k+1)(k-1)$ において，$k - 1$，k，$k + 1$ は連続 3 整数なので，この中に 3 の倍数が必ず 1 つ存在する．

次に k が偶数ならば，k^2 は 4 の倍数になり，k が奇数ならば，$k + 1$ と $k - 1$ は偶数なので，$(k+1)(k-1)$ は 4 の倍数になる．つまり，$k^2(k+1)(k-1)$ は必ず 4 の倍数になる．

よって，(分子) は必ず 12 の倍数になるので，q は整数である．

以上より，q は 0 以上の整数になる．

■

注　結局，$k^2(k+1)(k-1)$ が 12 の倍数であることを示すのがポイントでした．

参考　次のように，うまく式変形して，証明することもできます．

$$k^2(k+1)(k-1)$$
$$=(k^2 + 2k - 2k)(k+1)(k-1)$$
$$=(k^2 + 2k)(k+1)(k-1) - 2k(k+1)(k-1)$$
$$=k(k+2)(k+1)(k-1) - 2k(k+1)(k-1)$$

$k(k+2)(k+1)(k-1)$ は連続 4 整数の積なので 24 の倍数である．また，$k(k+1)(k-1)$ は連続 3 整数の積なので 6 の倍数なので，$2k(k+1)(k-1)$ は 12 の倍数である．

したがって，$k^2(k+1)(k-1)$ は 12 の倍数になる．