2015 年後期

x，y，z を整数とする．

(1) $y \neq 0$ かつ $yz \neq -1$ のとき，$\left|y+\dfrac{1}{z}\right|$ の最小値を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}=\dfrac{9}{11}$ を満たす x，y，z の組をすべて求めよ．

考え方 (1) は地味に難しいです．厳密に解こうとするとなかなか大変です (✎注)．今回は，ある程度直観的に考えたいと思います．まずは，$\left|y+\dfrac{1}{z}\right|$ の解釈です．「絶対値を外そう」などど思わずに意味を考えます．$\left|y+\dfrac{1}{z}\right|=\left|y-\left(-\dfrac{1}{z}\right)\right|$ と考えれば，$\left|y+\dfrac{1}{z}\right|$ は，数直線上での y と $-\dfrac{1}{z}$ の距離を表しています．次のポイントは，y と z は独立に動くということです．数直線上の距離をイメージしながら，y と z をそれぞれ変化させると最小となる y と z は自ずと分かると思います．

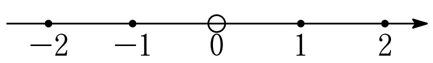
(2) は，もちろん (1) の結果を使います．

解

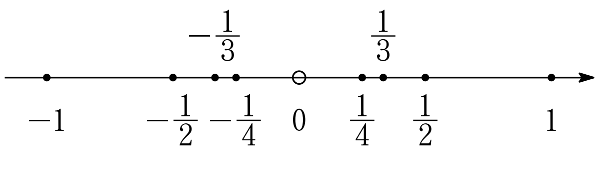
(1) $\left|y+\dfrac{1}{z}\right|=\left|y-\left(-\dfrac{1}{z}\right)\right|$ より，$\left|y+\dfrac{1}{z}\right|$ は，数直線上での y と $-\dfrac{1}{z}$ の距離を表している．

また，$yz \neq -1$ より，$y+\dfrac{1}{z} \neq 0$ なので，その距離は 0 ではない．

$y \neq 0$ より，y は 0 以外のすべての整数点をとり得る．



また $-\dfrac{1}{z}$ は，$\pm 1, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{3}, \cdots$，という点をとるので，数直線上では下図のように，$-1 \leqq -\dfrac{1}{z} \leqq 1$ 内の点として存在する



いま，この 2 つの数直線を重ねて考えると，y と $-\dfrac{1}{z}$ の距離 ($\neq 0$) が最初となるのは，

$$y=1 \quad かつ \quad -\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$$

または

$$y=-1 \quad かつ \quad -\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}$$

のときで，そのときの距離は $\dfrac{1}{2}$ である．

したがって，$(y,\ z)=(\pm 1,\ \mp 2)$ (複号同順) のとき，$\left|y+\dfrac{1}{z}\right|$ の最小値 $\dfrac{1}{2}$ である．

(2) $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}=\dfrac{9}{11}$ より，

$$x+\frac{1}{y+\dfrac{1}{z}}=\frac{11}{9} \quad \cdots(※)$$

ここで，$y=0$ とすると，$x+z=\dfrac{11}{9}$．y と z は整数なので矛盾．$\therefore\ y \neq 0$

さらに，$y+\dfrac{1}{z} \neq 0$ より $yz \neq -1$ なので，y と z は (1) の条件を満たしている．よって，

$$\left|y+\frac{1}{z}\right| \geqq \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1}{y+\dfrac{1}{z}}\right| \leqq 2$$

$$-2 \leqq \frac{1}{y+\dfrac{1}{z}} \leqq 2$$

$$-2 \leqq x-\frac{11}{9} \leqq 2$$

$$-\frac{7}{9} \leqq x \leqq \frac{26}{9}$$

x は整数なので

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

(i) $x=0$ のとき，(※) より

$$y+\frac{1}{z}=\frac{9}{11}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{9}{11}-y \quad \cdots ①$$

$-1 \leqq \dfrac{1}{z} \leqq 1$ より

$$-1 \leqq \frac{9}{11} - y \leqq 1$$

$$-\frac{2}{11} \leqq y \leqq \frac{20}{11}$$

y は整数なので，$y = 0,\ 1$

このとき，① より，z は整数にならないので不適。

(ii) $x = 1$ のとき，(※) より

$$y + \frac{1}{z} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{9}{2} - y \quad \cdots ②$$

$-1 \leqq \dfrac{1}{z} \leqq 1$ より

$$-1 \leqq \frac{9}{2} - y \leqq 1$$

$$\frac{7}{2} \leqq y \leqq \frac{11}{2}$$

y は整数なので $y = 4,\ 5$

このとき，① より，$z = 2,\ -2$

(iii) $x = 2$ のとき，(※) より

$$y + \frac{1}{z} = -\frac{9}{7}$$

$$\frac{1}{z} = -\frac{9}{7} - y \quad \cdots ③$$

$-1 \leqq \dfrac{1}{z} \leqq 1$ より

$$-1 \leqq -\frac{9}{7} - y \leqq 1$$

$$-\frac{16}{7} \leqq y \leqq -\frac{2}{7}$$

y は整数なので $y = -1,\ -2$

このとき，① より，z は整数にならないので不適.

(iv) $x = 3$ のとき，(※) より

$$y + \frac{1}{z} = -\frac{9}{16}$$

$$\frac{1}{z} = -\frac{9}{16} - y \quad \cdots ④$$

$-1 \leqq \dfrac{1}{z} \leqq 1$ より

$$-1 \leqq -\frac{9}{16} - y \leqq 1$$

$$-\frac{25}{16} \leqq y \leqq \frac{7}{16}$$

y は整数なので $y = 0,\ -1$

このとき，① より，z は整数にならないので不適.

以上より，求める $x,\ y,\ z$ の組は

$$(x,\ y,\ z) = (1,\ 4,\ 2),\ (1,\ 5,\ -2)$$

■

注　(1) について．**解** では数直線上の点をイメージして，直感的に解答しましたが，純粋にやるなら次のような手法になるでしょう．ポイントは「三角不等式」です．

▷Point◁ (三角不等式)

> $|A| \geqq |B|$ のとき
>
> $$|A| - |B| \leqq |A + B| \leqq |A| + |B|$$
>
> 前半の不等式で等号成立は $AB \leqq 0$ のとき
> 後半の不等式で等号成立は $AB \geqq 0$ のとき

証明は省略します．

今回の場合，$|y| \geqq \left|\dfrac{1}{z}\right|$ なので，この三角不等式で $A = y,\ B = \dfrac{1}{z}$ とすれば，

$$\left|y + \frac{1}{z}\right| \geqq |y| - \left|\frac{1}{z}\right| = |y| - \frac{1}{|z|}$$

$yz \neq -1$ なので，

$|y| \geqq 2$ ならば，z は 0 以外のすべての整数をとり得る．

$|y| = 1$ ならば，z は ± 1 以外のすべての整数をとり得る．

$|y| \geqq 2$ ならば，$\dfrac{1}{|z|} \leqq 1$ なので

$$|y| - \frac{1}{|z|} \geqq 2 - 1 = 1$$

$|y| = 1$ ならば，$\dfrac{1}{|z|} \leqq \dfrac{1}{2}$ なので

$$|y| - \frac{1}{|z|} \geqq 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

したがって，$\left|y + \dfrac{1}{z}\right|$ が最小となるのは，

$|y| = 1$ かつ $|z| = 2$，さらに，$yz \leqq 0$ の時であるので，$(y,\ z) = (\pm 1,\ \mp 2)$ (複号同順) のとき，$\left|y + \dfrac{1}{z}\right|$ の最小値 $\dfrac{1}{2}$ である．