2015 年前期

n を 2 以上の整数とする．n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す．たとえば

$$E(2)=1,\quad E(3)=2,\quad E(4)=2,\quad \cdots,\quad E(10)=4,\quad \cdots$$

である．

(1) $E(1024)$ を求めよ．
(2) $E(2015)$ を求めよ．
(3) m を正の整数とし，p，q を異なる素数とする．$n=p^mq^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ．

考え方　ようするに，$E(n)$ は「n 以下で n と互いに素な自然数の個数」のことで，いわゆる「オイラー関数」と呼ばれるものです (参考 参照)．でも，そんなことを知らなくても，ベン図を書けば簡単に分かります．

解

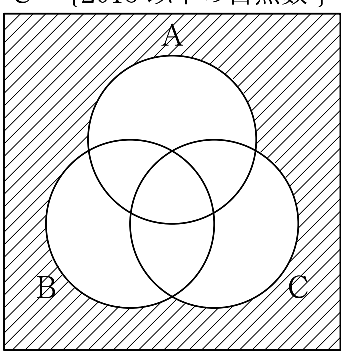
(1) $1024=2^{10}$ なので，1024 との最大公約数が 1 となるのは，素因数 2 を持たない数 (すなわち奇数) である．1024 以下の自然数のうち，2 の倍数は $\dfrac{1024}{2}=512$ 個あるので

$$E(1024)=1024-512=512$$

(2) $2015=5\times13\times31$ なので，2015 との最大公約数が 1 となるのは，素因数 5，13，31 を持たない数である．

2015 以下の自然数のうち，5 の倍数，13 の倍数，31 の倍数の集合を A，B，C とすると，$E(2015)$ は図の斜線部分の要素の個数である．

$U=\{2015$ 以下の自然数$\}$



集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表すと，

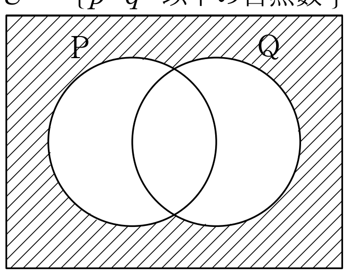
$$\begin{aligned}&n(A\cup B\cup C)\\&=n(A)+n(B)+n(C)\\&\qquad -n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\\&\qquad\quad +n(A\cap B\cap C)\\&=\frac{2015}{5}+\frac{2015}{13}+\frac{2015}{31}\\&\qquad -\frac{2015}{5\times13}-\frac{2015}{13\times31}-\frac{2015}{31\times5}\\&\qquad\quad +\frac{2015}{5\times13\times31}\\&=403+155+65-31-5-13+1=575\end{aligned}$$

$$E(2015)=2015-575=1440$$

(3) $n=p^mq^m$ (p と q は異なる素数，m は正の整数) より，n との最大公約数が 1 となるのは，素因数 p，q を持たない数である．

n 以下の自然数のうち，p の倍数，q の倍数の集合を P，Q とすると，$E(n)$ は図の斜線部分の要素の個数である．

$U=\{p^mq^m$以下の自然数$\}$



$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=\frac{n}{p}+\frac{n}{q}-\frac{n}{pq}$$
$$\therefore\quad E(n)=n-\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}-\frac{n}{pq}\right)$$

よって，

$$\frac{E(n)}{n}=1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

式の対称性より，$p<q$ としても一般性を失わない．

このとき，$p\geqq 2$，$q\geqq 3$ なので，

$$0<\frac{1}{p}\leqq\frac{1}{2},\qquad 0<\frac{1}{q}\leqq\frac{1}{3}$$
$$1-\frac{1}{p}\geqq\frac{1}{2},\qquad 1-\frac{1}{q}\geqq\frac{2}{3}$$

よって

$$\frac{E(n)}{n}=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\geqq\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$
$$\therefore\quad\frac{E(n)}{n}\geqq\frac{1}{3}$$

(ただし，等号成立は，$(p,\ q)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$ のとき)

■

参考 (3) で，$n=p^mq^m$ のとき，

$$E(n)=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

だったわけですが，なかなか美しい形をしていますね．

ところで，(1)(2) では，機械的な数値計算をしましたが，もう一度振り返ってみよう．

(1) は，$n=2^{10}$ の場合でした．

$$E(n)=1024-\frac{1024}{2}=1024\left(1-\frac{1}{2}\right)=n\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

と表すことができます．

(2) は，$n=5\times13\times31$ の場合でした．

$$E(n)=2015-\Big\{\frac{2015}{5}+\frac{2015}{13}+\frac{2015}{31}-\frac{2015}{5\times13}-\frac{2015}{13\times31}-\frac{2015}{31\times5}+\frac{2015}{5\times13\times31}\Big\}$$
$$=2015\left(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{13}-\frac{1}{31}+\frac{1}{5\cdot13}+\frac{1}{13\cdot31}+\frac{1}{31\cdot5}-\frac{1}{5\cdot13\cdot31}\right)$$
$$=2015\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\left(1-\frac{1}{31}\right)$$
$$=n\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\left(1-\frac{1}{31}\right)$$

と表すことができます．

以上のことから，一般的に次のような公式が成立すると思われます．

▷Point◁

> $n=p^\alpha q^\beta r^\gamma\cdots$ と素因数分解する．
> 　　　　　　　($p,\ q,\ r,\ \cdots$ は素数)．
> このとき，n 以下の自然数で n と互いに素な整数の個数を $E(n)$ をすると
> $$E(n)=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\cdots$$
> と表される．
> この $E(n)$ をオイラー関数という．

今回の問題は，まさにこのオイラー関数がテーマになっています．でも，知らなくても全く問題ありません．上の **解** のように普通に解けばよろしい．むしろ，知ったかぶりで「オイラー関数の公式より」で解答する方が印象悪くなるでしょう (笑)．