2016 年後期

m を整数とする．3 次方程式 $x^3+mx^2+(m+8)x+1=0$ は有理数の解 α を持つ．

(1) α は整数であることを示せ．

(2) m を求めよ．

考え方　「最高次の係数が 1 である整数係数の方程式が有理数解を持つならば，それは整数に限られる」という有名事実は，これまでにも多くの大学で出題されてきました (1996 年京都大，2001 年神戸大など)．なので，証明方法も定番中の定番なので，まだ解いたことのない人は，この解法の流れをしっかりと憶えてください．

(2) は，方程式が整数解を持つことが示されてるので，その整数解は定数項を見れば分かりますね．

解

(1)　有理数解 α を $\alpha=\dfrac{q}{p}$ ($p>0$，p と q は互いに素) とおく．このとき，

$$\left(\frac{q}{p}\right)^3+m\left(\frac{q}{p}\right)^2+(m+8)\left(\frac{q}{p}\right)+1=0$$

$$q^3+mpq^2+(m+8)p^2q+p^3=0$$

$$q^3=-mpq^2-(m+8)p^2q-p^3$$

$$q^3=p\{-mq^2-(m+8)pq-p^2\}$$

p，q，m は整数なので，$-mq^2-(m+8)pq-p^2$ は整数．

よって，q^3 は p で割り切れるが，p と q は互いに素なので，$p=1$．つまり，α は整数である．

よって，有理数解 α は整数である．

(2)

$$\alpha^3+m\alpha^2+(m+8)\alpha+1=0$$

$$1=-\alpha^3-m\alpha^2-(m+8)\alpha$$

$$1=\alpha\{-\alpha^2-m\alpha-(m+8)\}$$

α と m は整数なので，$-\alpha^2-m\alpha-(m+8)$ は整数．

つまり，1 は α で割り切れるので $\alpha=\pm1$．

(i)　$\alpha=1$ のとき

$1+m+(m+8)+1=0$ より，$m=-5$

(ii)　$\alpha=-1$ のとき

$-1+m-(m+8)+1=0$ より，$8=0$(矛盾)

よって，(i)(ii) より

$$m=-5$$

■