2016 年前期

$6\cdot 3^{3x}+1=7\cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ.

考え方　シンプルですが，なかなか難しい問題です．とりあえず，直観的に x に 0 以上の整数を代入して，解を 1 個求めることはできると思います．そう，$x=0$ が解であることが分かります．さて，他にあるでしょうか．あるならば，何なのか．

ここで重要なのは「指数関数に対する大雑把な感覚」です．問題文の式は

$$6\cdot 27^{x}+1=7\cdot 25^{x}\quad\cdots(※)$$

となるので，この式から何か思うことはありませんか．私なら，「0 以外にあるとすればおそらく 1 個，それもそんなに大きくない数だろう」と思えてきます．

例えば，$y=2^x$ と $y=3^x$ を考えてみてください．2 と 3 のわずかな違いなのに，$2^{10}=1024$，$3^{10}=59049$ と $x=10$ で約 60 倍も違うのです．つまり，底がデカい方が圧倒的にとり得る値がデカくなります．なので，式 (※) をみれば，(左辺) の指数の方がデカいので，「x がある程度デカくなれば，明らかに (左辺) > (右辺) になるはずだ」と思えます．

また，2 つのグラフ $6\cdot 27^x+1$ と $y=7\cdot 25^x$ のグラフをイメージすると，ともに下に凸な単調増加のグラフで形も似ています．ということは，交点が 3 つも 4 つもあるわけないですよね．

以上の考察から，以下のような答案になります．

解

$$6\cdot 3^{3x}+1=7\cdot 5^{2x}\quad\cdots①$$

(i) $x=0$ のとき
(左辺) $=6\cdot 1+1=7$
(右辺) $=7\cdot 1=7$
(左辺) = (右辺) より，$x=0$ のとき ① は成立する．

(ii) $x=1$ のとき
(左辺) $=6\cdot 3^3+1=163$
(右辺) $=7\cdot 5^2=175$
(左辺) ≠ (右辺) より，$x=1$ のとき ① は成立しない．

(iii) $x=2$ のとき
(左辺) $=6\cdot 3^6+1=4375$
(右辺) $=7\cdot 5^4=4375$
(左辺) = (右辺) より，$x=2$ のとき ① は成立する．

(iv) $x\geqq 3$ のとき
① の (左辺) > (右辺) であることを数学的帰納法で証明する．
[Ⅰ] $x=3$ のとき
(左辺) $=6\cdot 3^9+1=118099$
(右辺) $=7\cdot 5^6=109375$
(左辺) > (右辺) より，$x=3$ のとき成立．
[Ⅱ] $x=k$ ($k\geqq 3$) のとき成立すると仮定すると

$$6\cdot 3^{3k}+1>7\cdot 5^{2k}$$

$x=k+1$ のときの差を考えると

$$\begin{aligned}&6\cdot 3^{3(k+1)}+1-7\cdot 5^{2(k+1)}\\=&3^3\times 6\cdot 3^{3k}+1-7\cdot 5^{2(k+1)}\\>&3^3(7\cdot 5^{2k}-1)+1-7\cdot 5^{2(k+1)}\\=&3^3(7\cdot 5^{2k}-1)+1-5^2\times 7\cdot 5^{2k}\\=&(3^3-5^2)7\cdot 5^{2k}-3^3+1\\=&14\cdot 5^{2k}-26\\\geqq&14\times 5^6-26>0\end{aligned}$$

$$\therefore\ 6\cdot 3^{3(k+1)}+1>7\cdot 5^{2(k+1)}$$

よって，$x=k+1$ の時も成立する．
[Ⅰ][Ⅱ] より，$x\geqq 3$ のとき

$$6\cdot 3^{3x}+1>7\cdot 5^{2x}$$

なので，① を満たす x は存在しない．

以上より，① を満たす 0 以上の整数 x は

$$x=0,\ 2$$

■

注 (iii) の $x=2$ のとき，(iv)[I] の $x=3$ のときについて，上記解答では具体的に数値計算して示しましたが，次のような式変形でもできます．

$x=2$ のとき

(左辺) $=6\cdot 3^6+1=6\cdot 27^2+1=6(25+2)^2+1$

$=6(25^2+4\cdot 25+4)+1$

$=6\cdot 25^2+24\cdot 25+25$

$=6\cdot 25^2+(24+1)\cdot 25$

$=6\cdot 25^2+25^2=7\cdot 25^2=7\cdot 5^4=$ (右辺)

$\therefore$ (左辺) $=$ (右辺)

$x=3$ のとき

(左辺) $=6\cdot 3^9+1=6\cdot 27^3+1=6(25+2)^3+1$

$=6(25^3+3\cdot 25^2\cdot 2+3\cdot 25\cdot 2^2+2^3)+1$

$=6\cdot 25^3+36\cdot 25^2+72\cdot 25+48+1$

$>6\cdot 25^3+36\cdot 25^2$

$>6\cdot 25^3+25\cdot 25^2$

$=6\cdot 25^3+25^3=7\cdot 25^3=7\cdot 5^6=$ (右辺)

$\therefore$ (左辺) $>$ (右辺)

この $x=3$ のときの計算手法を真似ると，$x\geqq 3$ のとき

$$6\cdot 3^{3x}+1>7\cdot 5^{2x}$$

が成立することの証明も，数学的帰納法を用いずにダイレクトにやることも可能です．やってみましょう．

(左辺) $=6\cdot 3^{3x}+1=6\cdot 27^x+1=6(25+2)^x+1$

$=6(25^x+{}_x\mathrm{C}_1 25^{x-1}\cdot 2+\cdots+2^x)+1$

$>6\times 25^x+12x\cdot 25^{x-1}$

$>6\times 25^x+25\cdot 25^{x-1}$ $(\because\ x\geqq 3)$

$=6\times 25^x+25^x=7\cdot 25^x=7\cdot 5^{2x}=$ (右辺)

$\therefore$ (左辺) $>$ (右辺)

うまい式変形ではありますが，なかなか思いつきませんね．解 のように，普通に数値計算と数学的帰納法でやるのが安全かと思います．