2017 年前期

連立方程式 $\begin{cases} x^2 = yz + 7 \\ y^2 = zx + 7 \\ z^2 = xy + 7 \end{cases}$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，$x \leqq y \leqq z$ となるものを求めよ．

考え方 シンプルな連立方程式ですが，なかなか手強い．様々な解き方が考えられます．後ほど，いろいろ紹介しますが，まずはベストの方法でやってみましょう．

解

$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 \cdots ① \\ y^2 = zx + 7 \cdots ② \\ z^2 = xy + 7 \cdots ③ \end{cases}$$

① − ② より

$$x^2 - y^2 = yz - zx$$
$$(x+y)(x-y) = z(y-x)$$
$$(x-y)(x+y+z) = 0$$
$$\therefore\ x = y \quad \text{または} \quad x+y+z=0$$

② − ③ より

$$y^2 - z^2 = zx - xy$$
$$(y+z)(y-z) = x(z-y)$$
$$(y-z)(x+y+z) = 0$$
$$\therefore\ y = z \quad \text{または} \quad x+y+z=0$$

ここで，$x+y+z \neq 0$ とすると，「$x=y$ かつ $y=z$」すなわち

$$x = y = z$$

となる．このとき，① より，$0=7$ となり矛盾．したがって，

$$x+y+z=0$$

であることが分かる．

次に，① + ② + ③ より

$$x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx+21 \quad \cdots ④$$
$$(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = xy+yz+zx+21$$

$x+y+z=0$ より

$$xy+yz+zx = -7$$

よって，④ より

$$x^2+y^2+z^2 = 14$$

さて，x，y，z は整数なので，x^2，y^2，z^2 は平方数 (0，1，4，9，16，25，…) である．平方数を 3 つ足して 14 になるのは，$1+4+9$ の場合しかない．

したがって，±1 から 1 つ，±2 から 1 つ，±3 から 1 つ選んで，和が 0 になる組み合わせを考えれば良い．そのような組み合わせは

$$1 \text{ と } 2 \text{ と } -3, \qquad -1 \text{ と } -2 \text{ と } 3$$

しかない．したがって，$x \leqq y \leqq z$ より

$$(x,\ y,\ z) = (-3,\ 1,\ 2),\ (-2,\ -1,\ 3)$$

■

注 それでは，怒濤の別解シリーズです．

別解 1

上の **解** で $x+y+z=0$ のあと，$x=y=z=0$ は不適であることを述べた上で，$x \leqq y \leqq z$ より

$$x < 0 \quad \text{かつ} \quad z > 0$$

になることが分かるでしょう．つまり

$$xz < 0$$

よって，② より，$y^2 < 7$ となるので

$$y^2 = 0,\ 1,\ 4$$

と定まります．それぞれの場合に zx の値がどうなるのか検証し，$x \leqq z$ を考慮して x と z を確定します．最終的に，$x \leqq y \leqq z$ を満たすものを取ります．

別解 2

上の 解 で $x+y+z=0$ のあと，$z=-x-y$ とし，① に代入すると

$$x^2=y(-x-y)=7$$

$$x^2+xy+y^2=7 \text{ 考慮}$$

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=7$$

$$(2x+y)^2+3y^2=21$$

$(2x+y)^2 \geqq 0$ なので

$$y^2=0,\ 1,\ 4,\ 9$$

と定まります．で，それぞれの場合に，$2x+y$ の値がどうなるのか順番に検証します．その後，$x \leqq y$ を考慮して x と y を確定し，z も調べて，最終的に，$x \leqq y \leqq z$ を満たすものを取ります．真面目にコツコツやるだけですが，やや面倒です．

別解 3

① + ② + ③ より

$$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx+21$$

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=21$$

この式を見ればピンとくるでしょう．つまり，

$$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=21$$

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=42$$

解 と同様に，平方数を 3 つ足して 42 になるのは，$1+16+25$ の場合しかない．また，$x \leqq y \leqq z$ なので，$(x-y)^2$，$(y-z)^2$，$(z-x)^2$ の中で，$(z-x)^2$ が最大なので

$$(x-y)^2=1,\ (y-z)^2=16,\ (z-x)^2=25$$

または

$$(x-y)^2=16,\ (y-z)^2=1,\ (z-x)^2=25$$

$x \leqq y \leqq z$ なので

$$(x-y,\ y-z,\ z-x)=(-1,\ -4,\ 5),\ (-4,\ -1,\ 5)$$

ここから，，x，y，z を求め，$x \leqq y \leqq z$ を満たしているかチェックします．

別解 4

これは，まだ未完成の別解ですが ……

解 において，

$$x+y+z=0$$

$$xy+yz+zx=-7$$

が分かったわけですから，当然ながら，xyz の値を求めようと思うでしょう．xyz の値が分かれば，解と係数の関係から，x，y，z を解にもつ 3 次方程式が作れるからです．しかし，どうしても xyz の値が出てこないのです．最終的な答えが

$$(x,\ y,\ z)=(-3,\ 1,\ 2),\ (-2,\ -1,\ 3)$$

なので，$xyz=\pm 6$．つまり，$x^2y^2z^2=36$ であることを導けば良いのですが，できません．

どなたかできましたら教えてください．