2018 年前期

正の整数 n の各位の数の和を $S(n)$ で表す．たとえば，

$$S(3)=3, \qquad S(10)=1+0=1, \qquad S(516)=5+1+6=12$$

である．

(1) $n \geqq 10000$ のとき，不等式 $n > 30S(n)+2018$ を示せ．
(2) $n = 30S(n)+2018$ を満たす n を求めよ．

考え方　直感的に，$S(n)$ を n の式で表すことは不可能だと気づくと思います．では，どうすればよいのでしょうか？ (1) で，$n \geqq 10000$ という条件がヒントになっています．この条件は「n が 5 桁以上の整数であること」を意味しています．

仮に，n が 5 桁の整数 ($10000 \leqq n \leqq 99999$) とすると，$1 \leqq S(n) \leqq 45$ なので，

$$2048 \leqq 30S(n)+2018 \leqq 3368$$

ですから，$n > 30S(n)+2018$ は明らかに成立しますね．n の桁数が大きくなれば，n 自体が相当デカくなりますが，$30S(n)+2018$ はそれほどデカくはなりそうにないから，ほとんど明らかですね．

つまり，n で場合分けするのではなく，n の桁数で場合分けすることがポイントです．

(1) ができれば，(2) は特に問題ないでしょう．

解

(1)　n が m 桁の整数であるとすると

$$10^{m-1} \leqq n < 10^m$$

となる．このとき，

$$1 \leqq S(n) \leqq 9m$$

であり

$$2048 \leqq 30S(n)+2018 \leqq 270m+2018$$

だから，$m \geqq 5$ のとき

$$10^{m-1} > 270m+2018$$

が成立することを示せば良い．

この不等式を数学的帰納法で示す．

[I] $n=5$ のとき

(左辺) $= 10^4 = 10000$

(右辺) $= 270 \times 5 + 2018 = 3368$

(左辺) > (右辺) より，$m=5$ のとき成立．

[I] $n=k$ のとき成立すると仮定する．

$$10^{k-1} > 270k+2018$$

$n=k+1$ のときの差を考えると

$$\begin{aligned}
&10^{(k+1)-1}-\{270(k+1)+2018\}\\
&=10\cdot 10^{k-1}-(270k+2018+270)\\
&>10(270k+2018)-(270k+2018+270)\\
&=2430k+17892>0
\end{aligned}$$

$$\therefore\ 10^{(k+1)-1} > 270(k+1)+2018$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

[I][II] より，$m \geqq 5$ のすべての自然数 m で成立する．

したがって，$n \geqq 10000$ のとき，不等式

$$n > 30S(n)+2018$$

が成り立つ．

(2)　(1) より，$n = 30S(n)+2018$ を満たす n は，$n < 10000$ であるので

$$n = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$$

(a，b，c，d は 0 から 9 までの整数)

と置くことができる．このとき

$$S(n) = a+b+c+d$$

なので

$$a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d = 30(a+b+c+d)+2018 \cdots ①$$

をみたす, 0 から 9 までの整数 a, b, c, d を求める．

まず，① の両辺の一の位の数字を比較することにより

$$d = 8$$

よって，

$$a\cdot10^3+b\cdot10^2+c\cdot10+8=30(a+b+c+8)+2018$$
$$a\cdot10^3+b\cdot10^2+c\cdot10=30(a+b+c+8)+2010$$
$$a\cdot10^2+b\cdot10+c=3(a+b+c+8)+201$$
$$97a+7b=225+2c \quad \cdots ②$$

$0 \leqq c \leqq 9$ より，$225 \leqq 225+2c \leqq 243$

$$225 \leqq 97a+7b \leqq 243$$

$0 \leqq b \leqq 9$ より，$a=2$ と確定する．

よって，② より

$$7b = 2c+31 \quad \cdots ③$$

$0 \leqq c \leqq 9$ より，

$$31 \leqq 2c+31 \leqq 49$$
$$31 \leqq 7b \leqq 49$$
$$\therefore\ b = 5,\ 6,\ 7$$

③ より，

$b=5$ のとき，$c=2$
$b=6$ のとき，$c=\dfrac{11}{2}$ （不適）
$b=7$ のとき，$c=9$

以上より，

$$(a,\ b,\ c)=(2,\ 5,\ 2),\ (2,\ 7,\ 9)$$

したがって，求める n は

$$n = 2528,\ 2798$$

■

注 (1) は数学的帰納法を用いずに，直接に証明することもできます．

n を m 桁の整数とし

$$n = a_{m-1}10^{m-1}+a_{m-2}10^{m-2}+\cdots+a_1 10^1+a_0 \quad (a_{m-1} \neq 0)$$

とおくと

$$S(n) = a_{m-1}+a_{m-2}+\cdots+a_1+a_0$$

$$\begin{aligned}&n-30S(n)-2018\\=&(10^{m-1}-30)a_{m-1}+\underline{(10^{m-2}-30)a_{m-2}+\cdots+(10^2-30)a_2}+(10^1-30)a_1+(1-30)a_0-2018\end{aligned}$$

ここで，上式の下線部分は 0 以上であるので

$$\begin{aligned}&n-30S(n)-2018\\ \geqq&(10^{m-1}-30)a_{m-1}+(10^1-30)a_1+(1-30)a_0-2018\\ =&(10^{m-1}-30)a_{m-1}-(20a_1+29a_2+2018)\end{aligned}$$

$0 \leqq a_1 \leqq 9$，$0 \leqq a_2 \leqq 9$ より，

$$2018 \leqq 20a_1+29a_2+2018 \leqq 2459$$

$m \geqq 5$，$a_{m-1} \geqq 1$ より，

$$(10^{m-1}-30)a_{m-1} \geqq (10^4-30)\cdot 1 = 9970$$

したがって，

$$(10^{m-1}-30)a_{m-1}-(20a_1+29a_2+2018) > 0$$
$$\therefore\ n > 30S(n)+2018$$