2020 年前期

以下の問いに答えよ．

（1）10^{10} を 2020 で割った余りを求めよ．
（2）100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 となるもののうち，2020 で割り切れるものの個数を求めよ．

考え方 （1）は，10^{10} を 2020 で割った余りを求めるというシンプルな問題です．まず，割り切れないことは明らかでしょう．10^{10} が 2 と 5 しか素因数に持たないのに対し，$2020 = 20\times101 = 2^2\times5\times101$ なので，101 を素因数に持っているからです．では，2020 で割った余りはどうやって求めるのか．この素因数 101 という数字を見て，合同式を使おうと思ってほしいものです．なぜなら，$10^2 \equiv -1 \pmod{101}$ だからです．なお，「10^{10} を 101 で割った余りを求めれば良い」と早合点してはいけませんよ．

（2）は，各位の和が 2 である整数なので，「最高位が 2 で以下すべて 0」または「最高位が 1 で以下どこかで 1 が 1 回表われる」場合が考えられます．この両者は一つの式で表されるのですが，分かりやすいために分けて考えましょう．なお，2020 で割った余りを求めるのではなく，割り切れるものを探すのが目的なので気は楽です．例えば，「6 で割り切れるかどうか」を調べるには「2 で割り切れ，かつ，3 で割り切れるかどうか」を調べますよね．これがヒントです．

解 以下の合同式はすべて 101 を法とする．

（1）
$10^{10} = 10^8\times20\times5$.
$2020 = 101\times20$
なので，$10^8\times5$ を 101 で割った余りを考える．
$10^2 \equiv 100 \equiv -1$ なので

$$10^8\times5 \equiv (10^2)^4\times5 \equiv (-1)^4\times5 \equiv 5$$

つまり，$10^8\times5$ を 101 で割った余りは 5 であるので，商を q とすると

$$10^8\times5 = 101q + 5$$

両辺を 20 倍して

$$10^{10} = 2020q + 100$$

したがって，10^{10} を 2020 で割った余りは 100 である．

（2）100 桁の正の整数を N とおく．

$2020 = 101\times20$ なので，N が 2020 で割り切れるための条件は，N が 20 で割り切れ，かつ，101 で割り切れることである．

（i）N の最高位の数字が 2 で，以下すべて 0 の場合

$$N = 2\times10^{99} = 20\times10^{98}$$

なので，N は 20 で割り切れるが 101 では割り切れない．

よって，N は 2020 で割り切れない．

（ii）N の最高位の数字が 1 で，以下，1 回だけ 1，他がすべて 0 の場合

$$N = 10^{99} + 10^k \quad (0 \leqq k \leqq 98)$$

とおける．この N が 2020 で割り切れるための k の条件を考える．

まず，N が 20 で割り切れるための条件は，

$10^{99} = 20\times5\times10^{97}$ より，10^{99} は 20 で割り切れるので，10^k が 20 で割り切れる条件を考えればよく，その条件は

$$k \geqq 2 \quad \cdots①$$

である．

次に，N が 101 で割り切れる条件を考える．

$$10^{99} \equiv (10^2)^{49}\times10 \equiv (-1)^{49}\times10 \equiv -10$$

なので，N が 101 で割り切れる条件は

$$10^k \equiv 10$$

である．

$$10^1 \equiv 10$$

$$10^2 \equiv 100 \equiv -1$$

$$10^3 \equiv 10^2 \times 10 \equiv -1 \times 10 \equiv -10$$

$$10^4 \equiv (10^2)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1$$

なので

$$10^{n+4} \equiv 10^4 \times 10^n \equiv 1 \times 10^n \equiv 10^n$$

より，10^n は 101 を法として周期 4 で変化する．

つまり，$10^k \equiv 10$ となる条件は

$$k = 4m + 1 \text{（m は 0 以上の整数）} \cdots ②$$

以上より，

①，② の条件を満たす k（$0 \leqq k \leqq 98$）は，初項が 5，公差が 4 の等差数列をなし，一般項 a_n は

$$a_n = 5 + (n-1) \times 4 = 4n + 1$$

$a_{24} = 97$，$a_{25} = 101$ なので，条件を満たす k は全部で 24 個ある．

■

✏注　2020 で割った余りや 2020 で割り切れるかどうかを調べる問題でしたが，実際には「101」を基準に考えています．

また，上の **解** では合同式を前面に使いました．今回のような「指数型」の数を割った余りを考える際には，合同式の使用は強力なので，この解法をマスターしてください．