2021 年前期

1000 以下の素数は 250 個以下であることを示せ.

考え方　非常に面白い問題です．素数の定義は知っていても，素数の見つけ方は知らない人も多いのではないでしょうか.

次の方法は，いわゆる「エラトステネスのふるい」と呼ばれるもので，素数を見つけ出す一番簡単で確実な方法です.

▷Point◁(エラトステネスのふるい)

Step1　数字 1 を消す
Step2　数字 2 を残して，それ以外の 2 の倍数を全部消す
Step3　数字 3 を残して，それ以外の 3 の倍数を全部消す
Step4　数字 5 を残して，それ以外の 5 の倍数を全部消す
Step5　数字 7 を残して，それ以外の 7 の倍数を全部消す
……

以下，この作業を繰り返していき，残った数が素数である.

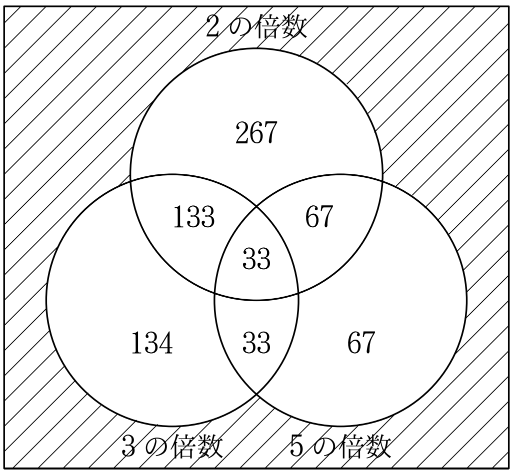
✎注 N 以下の素数を数えるには，$\sqrt{N}$ 以下の素数で順番に割って考えればよい.

を 1000 以下の素数を すべて リストアップするならば，$\sqrt{1000} \fallingdotseq 31.6$ なので，素数 31 まで順番に考えねばなりませんが，今回は「250 個以下であること」を示すだけなので，そこまで全部も調べる必要はありません.

では，どうするのか．要するに，ザックリ言えば，2 の倍数以外，3 の倍数以外，5 の倍数以外，…，の個数を数えればよいわけで，自ずとベン図を考えることになるでしょう．しかしながら，4 つ以上のベン図は書けないので (✎注 参照)，とりあえず 3 つのベン図で考えてみようか，と思うはずです.

1 から 1000 までの整数の集合の中に，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数の部分集合を考え，包含関係を考慮して，その要素の個数を計算すると以下のようになります (求め方は省略します).

2，3，5 以外の素数はすべて図の斜線部分に含まれている ことに注意しましょう.



図の斜線部分の個数を計算すると 266 個．したがって，素数の個数は 2，3，5 の 3 個を加えて 269 個以下であると分かります．惜しいですね．もしも問題文が「270 個以下であることを示せ」ならば，これで証明終了ですが，250 以下にするには，まだ 19 個多い．つまり，斜線部分に含まれる素数以外の整数 (つまり合成数) を何でもいいから 19 個以上見つければよいのです.

2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数はすでに調べたので，次に考えるのは 7 の倍数でしょう．

1 から 1000 までに含まれる，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数以外の 7 の倍数は，7 と 2，3，5 以外の素数をかけ合わせて，

$$7\times7,\quad 7\times11,\quad 7\times13,\quad 7\times19,\quad 7\times23,\quad 7\times29,\quad 7\times31,\cdots\cdots$$

こんな感じで 19 個書き出せば良いです（ちなみに，100 以下の素数は

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

の 25 個ありますが，2，3，5 は使えないので残り 22 個．この中から 19 個選べば良い）．

でも，こんなにダラダラと書き出さなくても，何でもいいから合成数を 19 個作ればよいのだから，「7，　11，　13，　17，　19，　23」の 6 個の素数だけをつかって

	7	11	13	17	19	23
7	7×7	7×11	7×13	7×17	7×19	7×23
11		11×11	11×13	11×17	11×19	11×23
13			13×13	13×17	13×19	13×23
17				17×17	17×19	17×23
19					19×19	19×23
23						23×23

という表を作れば，これだけで合成数が 21 個作りだせます．

つまり，これらの 21 個の合成数は全て斜線部分に含まれているので，斜線部分に含まれる素数の個数は $269-21=248$ 個以下であることが分かります．これで証明終了です．

解　上の $\boxed{\text{考え方}}$ でほとんど解説したので省略．

■

✎注　上の 解 では 3 つの集合のベン図を考えましたが．4 つの集合のベン図を考えることはできないのでしょうか．実際に 4 つの集合のベン図を書くことは極めて困難ですが，包含排除法則は成立します．

集合が 2 つ，3 つの場合の包含排除法則は知っていると思いますが，4 つ以上の場合も同様な法則が成立します．

▷Point◁(包含排除法則)

集合 X に含まれる要素の個数を $n(X)$ で表す．

2 つの集合 A，B に対して

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

3 つの集合 A，B，C に対して

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

4 つの集合 A，B，C，D に対して

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C\cup D)&=n(A)+n(B)+n(C)+n(D)\\&\quad-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(A\cap D)-n(B\cap C)-n(B\cap D)-n(C\cap D)\\&\quad+n(A\cap B\cap C)+n(B\cap C\cap D)+n(C\cap D\cap A)+n(D\cap A\cap B)\\&\quad-n(A\cap B\cap C\cap D)\end{aligned}$$

解　全体集合 $U=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 1000\}$ とし，
2 の倍数の集合を A,
3 の倍数の集合を B,
5 の倍数の集合を C,
7 の倍数の集合を D,
とする．集合 X に含まれる要素を個数を $n(X)$ と表す．

$A\cap B\cap C\cap D$ は 210 の倍数の集合なので

$$n(A\cap B\cap C\cap D)=4$$

$A\cap B\cap C$ は 30 の倍数の集合なので

$$n(A\cap B\cap C)=33$$

$B\cap C\cap D$ は 105 の倍数の集合なので

$$n(B\cap C\cap D)=9$$

$C\cap D\cap A$ は 70 の倍数の集合なので

$$n(C\cap D\cap A)=14$$

$D\cap A\cap B$ は 42 の倍数の集合なので

$$n(D\cap A\cap B)=23$$

$A\cap B$ は 6 の倍数の集合なので

$$n(A\cap B)=166$$

$A\cap C$ は 10 の倍数の集合なので

$$n(A\cap B)=100$$

$A\cap D$ は 14 の倍数の集合なので

$$n(A\cap D)=71$$

$B\cap C$ は 15 の倍数の集合なので

$$n(B\cap C)=66$$

$B\cap D$ は 21 の倍数の集合なので

$$n(B\cap D)=47$$

$C\cap D$ は 35 の倍数の集合なので

$$n(C\cap D)=28$$

また，

$$n(A)=500,\qquad n(B)=333$$
$$n(C)=200,\qquad n(D)=142$$

以上より

$$n(A\cup B\cup C\cup D)=500+333+200+142-(166+100+71+66+47+28)+(33+9+14+23)-4=772$$

したがって, 1 から 1000 までの整数のうち, 2, 3, 5, 7 のいずれでも割り切れない整数は $1000-772=228$ 個あり，これに，素数 2，3，5，7 の 4 個を加えると 232 個.

よって，1000 以下の素数は 232 個以下なので，題意は証明された.

■

この解法は極めてシンプルですが，4 つの集合の包含排除法則が証明されていないので (教科書には 3 つまでしか載っていない)，この解法を入試本番の答案で使うのは，ちょっと避けた方が良いかもしれませんね．包含排除法則については，また別の機会に解説したいと思います.

実は，さらにハイパーな上手い解法があります．2015 年前期で登場したオイラー関数を利用します.

例えば，$1000=2^3\times5^3$ 以下の自然数で 1000 と互いに素な自然数の個数は

$$1000\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=400 \text{ 個}$$

あります．つまり，1000 以下の素数もこの 400 個の中に入っているので，1000 以下の素数は 2 と 5 を加えた 402 個以下であることが分かります．これだと，まだまだ精度が低い．精度を上げるには，1000 を少し超えても良いから素因数の個数を増やす必要があります.

$2\times3\times5\times7=210$　（まだまだ小さい）

$2\times3\times5\times7\times13=2730$　（大きすぎる）

なので，$2\times3\times5^2\times7=1050$ あたりがちょうど良さそうです.

$1050=2\times3\times5^2\times7$ 以下の自然数で 1050 と互いに素な自然数の個数は

$$1050\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=240 \text{ 個}$$

あります．つまり，1050 以下の素数もこの 240 個の中に入っているので，1050 以下の素数は 2 と 3 と 5 と 7 を加えた 244 個以下であることが分かります.

■