2018 年文理共通

n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

考え方　とりあえず n にいろいろ代入して実験し，手がかりをつかみます．今回は n は整数なので，負の数も考慮します．

n	n^3-7n+9
-3	3
-2	15
-1	15
0	9
1	3
2	3
3	15

この表を見れば，n^3-7n+9 がなり得る素数は 3 に限られそうです．3 以外の値になるところに共通する性質を考えれば，何を証明すればよいのかすぐに分かるでしょう．

2016 年，2006 年にも類題が出題されています．

解　すべての整数 n に対して，n^3-7n+9 が 3 の倍数であることを示す．

(i)　$n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$n^3-7n+9 \equiv 9 \equiv 0 \pmod 3$$

(ii)　$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$n^3-7n+9 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$$

(iii)　$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$n^3-7n+9 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$$

したがって，すべての整数 n に対して，n^3-7n+9 は 3 の倍数になるので，n^3-7n+9 が素数になるとすれば，その素数は 3 である．

$$n^3-7n+9=3$$

$$n^3-7n+6=0$$

$$(n-1)(n-2)(n+3)=0$$

$$\therefore\ \ n=1,\ 2,\ -3$$

よって，n^3-7n+9 が素数となるような整数 n は

$$n=1,\ 2,\ -3$$

■

注　n^3-7n+9 がすべての整数 n で 3 の倍数になることを示すのがポイントでした．上の解法では，合同式を用いていますが，もちろん，$n=3k,\ 3k+1,\ 3k+2$ として，n^3-7n+9 に代入して，3 の倍数になることを確認しても構いませんが，3 乗の展開が少し面倒です．ここは合同式でサクッとやりましょう．

むしろ，次のような方法もあります．

$$n^3-7n+9$$

$$=n^3-n-6n+9$$

$$=n(n+1)(n-1)-3(2n-3)$$

$n(n+1)(n-1)$ は連続 3 整数の積なので 3 の倍数であるから，n^3-7n+9 は 3 の倍数である．

注　いずれにせよ，京大受験者にとっては「お手のもの」だったことでしょう．