2020 年理系

正の整数 a に対して

$$a = 3^b c \ (b,\ c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき，$B(a) = b$ と定める．例えば，$B(3^2 \cdot 5) = 2$ である．
m，n は整数で，次の条件を満たすとする．
(i) $1 \leqq m \leqq 30$.
(ii) $1 \leqq n \leqq 30$.
(iii) n は 3 で割り切れない．
このような $(m,\ n)$ について

$$f(m,\ n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき，

$$A(m,\ n) = B(f(m,\ n))$$

の最大値を求めよ．また，$A(m,\ n)$ の最大値を与えるような $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

考え方 問題文が長いですが，単純です．

$B(a)$ の意味は「a が 3 で最大何回割れるか」ということなので，$A(m,\ n) = B(f(m,\ n))$ は，「$f(m,\ n)$ が 3 で最大何回割れるか」を意味しています．つまり，この問題は「$f(m,\ n)$ が 3 で一番多く割れるような m と n の組み合わせを求めよ」ということです．

$f(m,\ n)$ が 3 の倍数でなければ，$A(m,\ n) = 0$ です．

$f(m,\ n)$ が 3 の倍数ならば，$A(m,\ n) \geqq 1$ なので，さらに 9 の倍数になるかどうかを調べます．9 の倍数にならなければ，$A(m,\ n) = 1$ と確定．9 の倍数になれば，$A(m,\ n) \geqq 2$ なので，さらに 27 の倍数になるかどうかを調べます．

このように，3 の累乗の倍数になるかどうかを順番に調べていけばよいのです．

まずは，いつ 3 の倍数になるのかから調べましょう．

解 以下の合同式はすべて 3 を法とする合同式とする．よって，(mod 3) の表記は省略する．

条件 (iii) より，$n \equiv 1$ または $n \equiv 2$ である．
(ア) $n \equiv 1$ のとき

$$f(m,\ n) \equiv m^3 + 1 + 1 + 3 \equiv m^3 + 2$$

・$m \equiv 0$ のとき，$f(m,\ n) \equiv 2$
・$m \equiv 1$ のとき，$f(m,\ n) \equiv 3 \equiv 0$
・$m \equiv 2$ のとき，$f(m,\ n) \equiv 10 \equiv 1$
(イ) $n \equiv 2$ のとき

$$f(m,\ n) \equiv m^3 + 4 + 2 + 3 \equiv m^3$$

・$m \equiv 0$ のとき，$f(m,\ n) \equiv 0$
・$m \equiv 1$ のとき，$f(m,\ n) \equiv 1$
・$m \equiv 2$ のとき，$f(m,\ n) \equiv 8 \equiv 2$
以上より，$f(m,\ n)$ が 3 の倍数になるのは，

「$n \equiv 1$ かつ $m \equiv 1$」または「$n \equiv 2$ かつ $m \equiv 0$」

の場合であり，$A(m,\ n)$ が最大値を取り得るのは，これらの場合に限られる．

これらの場合に，さらに，9 の倍数，27 の倍数，…，になるかどうかを調べる．

(Ⅰ) $n \equiv 1$ かつ $m \equiv 1$ のとき，$n = 3N + 1$，$m = 3M + 1$ とおくと

$$\begin{aligned} f(m,\ n) &= (3M+1)^3 + (3N+1)^2 + (3N+1) + 3 \\ &= 27M^3 + 27M^2 + 9M + 1 + 9N^2 + 6N + 1 + 3N + 1 + 3 \\ &= 27M^3 + 27M^2 + 9M + 9N^2 + 9N + 6 \\ &= 3(9M^3 + 9M^2 + 3M + 3N^2 + 3N + 2) \\ &= 3\{3(3M^3 + 3M + M + N^2 + N) + 2\} \end{aligned}$$

$3(3M^3 + 3M + M + N^2 + N) + 2$ は 3 の倍数ではないので，$f(m,\ n)$ は 3 の倍数であるが 9 の倍数ではない．

$$\therefore\ \ A(m,\ n) = B(f(m,\ n)) = 1$$

(Ⅱ) $n \equiv 2$ かつ $m \equiv 0$ のとき，$n = 3N + 2$，$m = 3M$ とおくと

$$\begin{aligned} f(m,\ n) &= (3M)^3 + (3N+2)^2 + (3N+2) + 3 \\ &= 27M^3 + 9N^2 + 12N + 4 + 3N + 2 + 3 \\ &= 27M^3 + 9N^2 + 15N + 9 \\ &= 3(9M^3 + 3N^2 + 5N + 3) \\ &= 3\{3(3M^3 + N^2 + N + 1) + 2N\} \end{aligned}$$

(a) $N \equiv 0$ のとき

$3(3M^3 + N^2 + N + 1) + 2N$ は 3 の倍数なので $f(m,\ n)$ は 9 の倍数．

$\therefore\ A(m,\ n) \geqq 2$

(b) $N \equiv 1$ のとき

$3(3M^3 + N^2 + N + 1) + 2N$ は 3 の倍数でないので $f(m,\ n)$ は 9 の倍数ではない．

$\therefore\ A(m,\ n) = 1$

(c) $N \equiv 2$ のとき

$3(3M^3 + N^2 + N + 1) + 2N$ は 3 の倍数でないので $f(m,\ n)$ は 9 の倍数ではない．

$\therefore\ A(m,\ n) = 1$

(Ⅰ)(Ⅱ) より，$A(m,\ n)$ の最大値をとり得るのは，(Ⅱ) の (a) の場合である．よって，この場合について考察していく．

$N = 3k$ とおくと，$n = 9k + 2$ であり，条件 (ii) より，$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$$\begin{aligned} f(m,\ n) &= 3\{3(3M^3 + 9k^2 + 3k + 1) + 6k\} \\ &= 3^2\{3(M^3 + 3k^2 + k) + 2k + 1\} \end{aligned}$$

したがって，$f(m,\ n)$ が 27 の倍数になるための条件は，$2k + 1$ が 3 の倍数にならなければならないので，$k = 1$ である (つまり，$n = 11$ と確定する)．

このとき，

$$f(m, n) = 3^2(3M^3 + 15) = 3^3(M^3 + 5)$$

ここで，$M^3 + 5$ が 3 の倍数になる場合を考える．

- $M \equiv 0$ のとき，$f(m,\ n) \equiv 5 \equiv 2$
- $M \equiv 1$ のとき，$f(m,\ n) \equiv 6 \equiv 0$
- $M \equiv 2$ のとき，$f(m,\ n) \equiv 13 \equiv 1$

$$\therefore\ \ M \equiv 1$$

$M = 3l + 1$ とおくと，

$$M^3 + 5 = (3l+1)^3 + 5 = 27l^3 + 27l^2 + 9l + 6$$

$$= 3(3l^3 + 9l^2 + 3l + 2) = 3\{3(l^3 + 3l^2 + l) + 2\}$$

$3(l^3 + 3l^2 + l) + 2$ は 3 の倍数ではないので，

$M^3 + 5$ は 3 の倍数であるが 9 の倍数ではない．

つまり，$f(m,\ n)$ は $81 (= 3^4)$ の倍数になるが，$243 (= 3^5)$ の倍数にはならない．

$$\therefore\ A(m,\ n) \text{ の最大値は } 4$$

このとき，

$m = 3M$，$M = 3l + 1$ より，$m = 9l + 3$．

条件 (i) より，$l = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ であるので，求める $(m,\ n)$ の組は，

$$(m,\ n) = (3,\ 11), (12,\ 11), (21,\ 11), (30,\ 11)$$

■