2017 年　奈良県立医大　推薦入試問題 (数学) 解答

【1】　以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．

実数全体で定義された x の関数

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

と正の実数 a を含む関数

$$g(x)=x^2-\frac{1}{a}\log\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)$$

を考える．

(1) $f'(x)$ が取り得る値の範囲は $\boxed{\text{ア}}<f'(x)\leqq\boxed{\text{イ}}$ で，$f(x)$ が取り得る値の範囲は $\boxed{\text{ウ}}<f(x)<\boxed{\text{エ}}$

(2) $g'(x)$ を f と a と x を用いて書くと $g'(x)=2x-\boxed{\text{オ}}$.
また，$0<a<\boxed{\text{カ}}$ のとき，$g(x)$ が極小となる点の個数は $\boxed{\text{キ}}$. $a>\boxed{\text{カ}}$ のとき，$g(x)$ が極小となる点の個数は $\boxed{\text{ク}}$.

解　(1) $f'(x)=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

$e^x>0$，$e^{-x}>0$ なので，相加相乗平均の大小関係から，$e^x+e^{-x}\geqq 2$（等号成立は $x=0$ のとき）
したがって，$0<\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}\leqq\dfrac{1}{2}$ より

$$0<f'(x)\leqq 1$$

また，

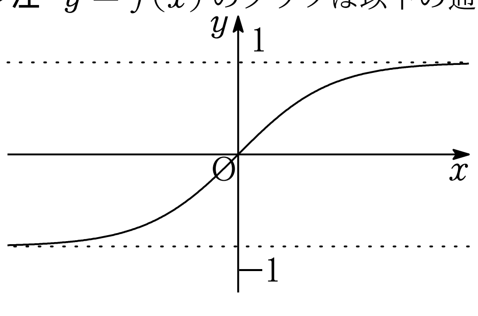
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t}-e^{t}}{e^{-t}+e^{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{2t}}-1}{\frac{1}{e^{2t}}+1}=-1$$

$y=f(x)$ は単調増加関数であるので，

$$-1<f(x)<1$$

注　$y=f(x)$ のグラフは以下の通り．



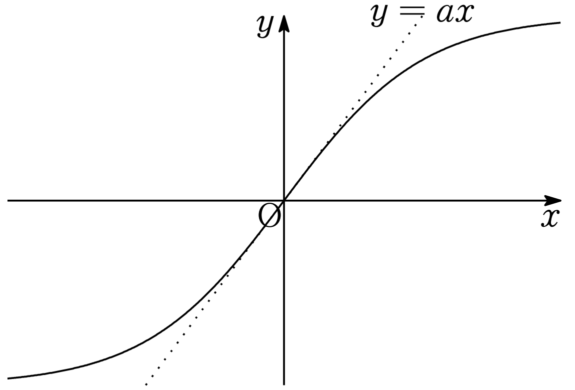
(2) $g'(x) = 2x - \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} = 2x - f(ax)$

したがって，$g'(x)$ の符号変化を調べるために，2 つのグラフ $y = 2x$ と $y = f(ax)$ の位置関係を調べる．

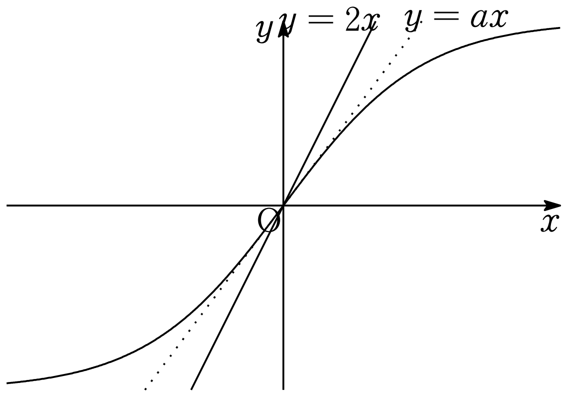
$y = f(ax)$ のグラフの形は右の通り．

特に，原点における接線が $y = ax$ になっていることに注意する．

このグラフと $y = 2x$ のグラフの位置関係は，次のようになる



(i) $0 < a < 2$ のとき，

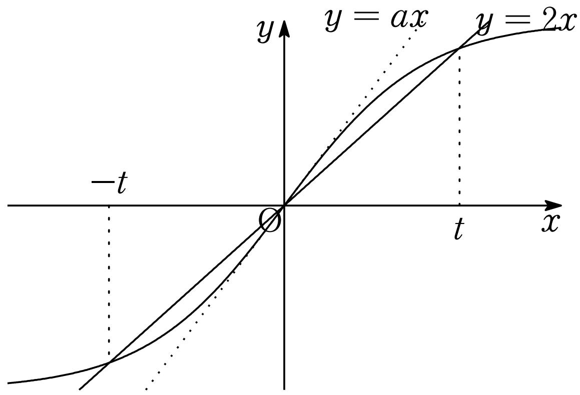


したがって，$g(x)$ の増減は

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	極小	↗

よって，極小値の個数は 1 個．

(ii) $a > 2$ のとき，



このとき，$y = f(ax)$ と $y = 2x$ が原点以外の 2 点で交わっている．図のように，交点を $x = \pm t$ とおくと，$g(x)$ の増減は

x	$\cdots$	$-t$	$\cdots$	0	$\cdots$	t	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

よって，極小値の個数は 2 個．

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
0	1	-1	1	$f(ax)$	2	1	2

■

【2】 以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．

条件

$$a_0 = p, \quad a_1 = q, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad (n \geqq 0)$$

によって定める数列 $\{a_n\}$ を考える．ただし，p，q は $p^2 + q^2 \neq 0$ なる実数である．この数列の一般項は $a_n = \boxed{\text{ア}}$ （$n \geqq 0$）と書ける．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \log(a_n{}^2 + 1) = \begin{cases} \boxed{\text{イ}} & \left(\boxed{\text{エ}} \neq 0 \text{ の場合}\right) \\ \boxed{\text{ウ}} & \left(\boxed{\text{エ}} = 0 \text{ の場合}\right) \end{cases}$$

解 漸化式より

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n) & \cdots\cdots ① \\ a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より，$a_{n+1} - 2a_n = (a_1 - a_0)(-1)^n = (q - 2p)(-1)^n$ ⋯⋯ ③

② より，$a_{n+1} + a_n = (a_1 + a_0)2^n = (q + p)2^n$ ⋯⋯ ④

よって，④ − ③ より，$3a_n = (p + q)2^n + (2p - q)(-1)^n$

$$a_n = \frac{(p+q)2^n + (2p-q)(-1)^n}{3} \quad (n \geqq 0)$$

ここで，$\dfrac{p+q}{3} = A$，$\dfrac{2p-q}{3} = B$ とおくと，$a_n = A2^n + B(-1)^n$.

$$\begin{aligned} a_n{}^2 + 1 &= \{A2^n + B(-1)^n\}^2 + 1 \\ &= A^2 4^n + 2AB(-2)^n + B^2 + 1 \\ &= 4^n \left\{ A^2 + 2AB\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{B^2+1}{4^n} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n}\log(a_n{}^2 + 1) &= \frac{n\log 4 + \log\left\{ A^2 + 2AB\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{B^2+1}{4^n} \right\}}{2n} \\ &= \log 2 + \frac{\log\left\{ A^2 + 2AB\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{B^2+1}{4^n} \right\}}{2n} \end{aligned}$$

$n \longrightarrow \infty$ のとき，$2AB\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{B^2+1}{4^n} \longrightarrow 0$ なので，

$A \neq 0$ のとき，$\log\left\{ A^2 + 2AB\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{B^2+1}{4^n} \right\} \longrightarrow \log A^2$（収束）

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\log(a_n{}^2 + 1) = \log 2$

$A = 0$ のとき，すなわち $p + q = 0$ のとき，

$$a_n = \frac{(p+q)2^n + (2p-q)(-1)^n}{3} = p(-1)^n$$

よって，$a_n{}^2+1=p^2+1$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\log(a_n{}^2+1)=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\log(a_n{}^2+1)=\begin{cases}\log 2 & (\,p+q\neq 0\text{ の場合}) \\ 0 & (\,p+q=0\text{ の場合})\end{cases}$$

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ
$\dfrac{(p+q)2^n+(2p-q)(-1)^n}{3}$	$\log 2$	0	$p+q$

■

【3】 以下の問いに答えよ．ただし，答のみ記入すればよい．

方程式

$$5z^4-12z^3+30z^2-12z+5=0$$

は $1+2i$ を解としてもつ．ただし，i は虚数単位とする。その他 3 個の解を $a+bi$（a，b は実数）の形で求めよ．

解 実数係数の方程式において，$1+2i$ が解であるとき，$1-2i$ も解である．

$1+2i$ と $1-2i$ を解にもつ 2 次方程式は，$(1+2i)+(1-2i)=2$，$(1+2i)(1-2i)=5$ なので，$z^2-2z+5=0$

よって，$5z^4-12z^3+30z^2-12z+5$ は z^2-2z+5 で割り切れる．

実際に割り算を実行すると

$$5z^4-12z^3+30z^2-12z+5=(z^2-2z+5)(5z^2-2z+1)$$

したがって，$5z^4-12z^3+30z^2-12z+5=0$ の解は，$z=1\pm 2i$，$\dfrac{1\pm 2i}{5}$

よって，求めるその他 3 個の解は

$$z=1-2i,\quad \frac{1}{5}+\frac{2}{5}i,\quad \frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

■

【4】　以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．

初めに黒石を 4 個と白石を 4 個用意する．次に袋を 4 つ用意し，それぞれの袋に黒石白石の区別なしに石を 2 個ずつ入れ，すべての袋を大きな箱に入れる．以下の操作 T を考える．

操作 T : 箱の中から袋を 2 つ取り出し，それらの袋の中の石を一旦片方の袋にすべて集める．石を十分に混ぜた後，石を 2 個取り出し，他方の袋に入れる．

操作 T によって，黒石と白石とが 1 個ずつ入っている袋の数 N は，変動しないか，2 増減する可能性がある．N は 0，2，4 のいずれかで，その変化する様子は以下の通りである．

- $N=0$ の状態に操作 T を施した後，$N=2$ になる確率は $\boxed{\text{ア}}$.
- $N=2$ の状態に操作 T を施した後，$N=0$ になる確率は $\boxed{\text{イ}}$ で $N=4$ になる確率は $\boxed{\text{ウ}}$
- $N=4$ の状態に操作 T を施した後，$N=2$ になる確率は $\boxed{\text{エ}}$.

解 黒石を B，白石を W とし，袋の中の様子を (　　) で表す．
$N=0$ のときは，(BB)，(BB)，(WW)，(WW)
$N=2$ のときは，(BW)，(BW)，(BB)，(WW)
$N=4$ のときは，(BW)，(BW)，(BW)，(BW)

(i) $N=0$ から $N=2$ になるのは
$N=0$ の状態で (BB) と (WW) を取り出し，混ぜた状態 (BBWW) から，B と W を 1 個ずつ取り出すことであるので，

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$

(ii) $N=2$ から $N=0$ になるのは
$N=2$ の状態で (BW) と (BW) を取り出し，混ぜた状態 (BBWW) から，B を 2 個または W を 2 個取り出すことであるので，

$$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} \times \frac{{}_2C_2 + {}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{18}$$

(iii) $N=2$ から $N=4$ になるのは
$N=2$ の状態で (BB) と (WW) を取り出し，混ぜた状態 (BBWW) から，B と W を 1 個ずつ取り出すことであるので，

$$\frac{{}_1C_1 \times {}_1C_1}{{}_4C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{9}$$

(iv) $N=4$ から $N=2$ になるのは
$N=4$ の状態で (BW) と (BW) を取り出し，混ぜた状態 (BBWW) から，B を 2 個または W を 2 個取り出すことであるので，

$$\frac{{}_4C_2}{{}_4C_2} \times \frac{{}_2C_2 + {}_2C_2}{{}_4C_2} = 1 \times \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ
$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$

■

【5】　以下の問いに答えよ．ただし，答のみ記入すればよい．

全体集合 U は有限個の要素からなる．また，A，B，C を U の部分集合とする．これら集合の要素の個数について，次のことが分かっている．

$$\begin{cases} A \text{ に含まれない要素の個数は } 51. \\ B \text{ に含まれない要素の個数は } 36. \\ C \text{ に含まれない要素の個数は } 55. \\ A \text{ または } B \text{ に含まれる要素の個数は } 54. \\ B \text{ または } C \text{ に含まれる要素の個数は } 49. \\ B \text{ に含まれるが，} A \text{ にも } C \text{ にも含まれない要素の個数は } 23. \\ A \text{ にも } C \text{ にも含まれる要素の個数は } 0. \end{cases}$$

このとき，U の要素の個数を求めよ．

解　集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表す．このとき条件より，

$$\begin{cases} n(U)-n(A)=51 & \cdots\cdots ① \\ n(U)-n(B)=36 & \cdots\cdots ② \\ n(U)-n(C)=55 & \cdots\cdots ③ \\ n(A\cup B)=54 & \cdots\cdots ④ \\ n(B\cup C)=49 & \cdots\cdots ⑤ \\ n(B)-n(A\cap B)-n(B\cap C)=23 & \cdots\cdots ⑥ \\ n(A\cap C)=0 \end{cases}$$

①，②，④ より

$$\begin{aligned} n(A\cap B) &= n(A)+n(B)-n(A\cup B) \\ &= n(U)-51+n(U)-36-54 \\ &= 2n(U)-141 \quad \cdots\cdots ⑦ \end{aligned}$$

②，③，⑤ より

$$\begin{aligned} n(B\cap C) &= n(B)+n(C)-n(B\cup C) \\ &= n(U)-36+n(U)-55-49 \\ &= 2n(U)-140 \quad \cdots\cdots ⑧ \end{aligned}$$

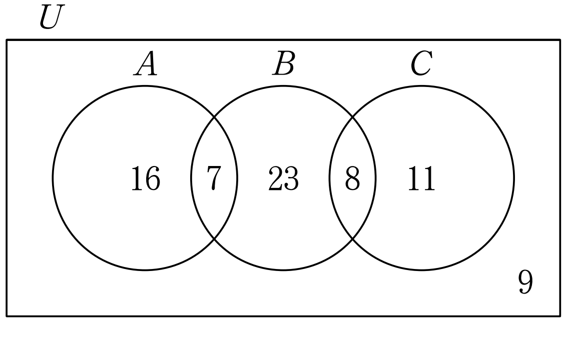
⑥ に，②，⑦，⑧ を代入して

$$n(U)-36-(2n(U)-141)-(2n(U)-140)=23$$

よって，$n(U)=74$

■

注　集合 A，B，C の包含関係は以下の通り．



【6】　以下の文章の空欄に適切な数，式または数学記号を入れて文章を完成させよ．ただし，（ア）と（ソ）には数学用語を入れよ．また，（イ）と（ウ）には本文中にある θ を使ってはならない．（サ）には 2 個の適切な数式を入れよ．

空間内に相異なる定点 O，P，Q をとり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$ で表す．$\vec{p}$，$\vec{q}$ は互いに平行ではないとする．θ を実数全体を動く媒介変数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \cos\theta\,\vec{p} + \sin\theta\,\vec{q}$$

を考える．以下では $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と表す．まず，この動点 R の軌跡は 3 点 O，P，Q で定まる平面内の曲線である．さらに，θ の値が 2π だけ変化するとき，動点 R は元の位置に戻ってくる．したがって，$\vec{r}$ の長さ $\left|\vec{r}\right|$ には最大値と最小値が存在する．もし最大値と最小値が一致するなら，この曲線は $\boxed{\text{ア}}$ になる．以下では最大値と最小値が一致しない場合を考える．$\vec{r}$ の長さの平方を計算するにあたって，まず定数 a，b，c を次のように定める．

$$a = \left|\vec{p}\right|^2 - \left|\vec{q}\right|^2, \quad b = 2\vec{p}\cdot\vec{q}, \quad c = \left|\vec{p}\right|^2 + \left|\vec{q}\right|^2$$

ここで，もし $a = b = 0$ ならば，$\left|\vec{r}\right|$ は一定となり，最大値と最小値が一致しないという仮定に反するので，今の場合 $a^2 + b^2 \neq 0$ であることがわかる．ここで定数 α を次のように定める．

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

これらの定数と媒介変数 θ とを用いて，$\left|\vec{r}\right|^2$ を表すと，$\left|\vec{r}\right|^2 = \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}}\sin\left(\boxed{\text{エ}}\right)$．したがって一般的に，$\left|\vec{r}\right|$ が最大値をとるのは $\theta = \boxed{\text{オ}} + n\pi$（$n$ は整数）のときであり，最小値をとるのは $\theta = \boxed{\text{カ}} + n\pi$（$n$ は整数）のときである．θ の値が 2π だけ変化するあいだに，$\left|\vec{r}\right|$ が最大値，最小値をとるのは，それぞれ 2 度あるが，$\left|\vec{r}\right|$ が最大となるときの $\vec{r}$ の一方を $\vec{A}$，また $\left|\vec{r}\right|$ が最小となるときの $\vec{r}$ の一方を $\vec{B}$ で表すと，たとえば，$\vec{A} = \boxed{\text{キ}}\,\vec{p} + \boxed{\text{ク}}\,\vec{q}$，$\vec{B} = \boxed{\text{ケ}}\,\vec{p} + \boxed{\text{コ}}\,\vec{q}$．$\left|\vec{r}\right|$ が最大，最小となる他方のベクトル $\vec{r}$ は $\vec{A}$，$\vec{B}$ を使ってそれぞれ $\boxed{\text{サ}}$ のように表される．ここで，$\vec{A}$，$\vec{B}$ の内積を計算すると，$\vec{A}\cdot\vec{B} = \boxed{\text{シ}}$．$\theta$ の代わりに新たな媒介変数 ϕ を $\phi = \theta + k$（k は定数）の形で導入して $\phi = 0$ のとき $\vec{r} = \vec{A}$ となるように k を定めると，$\vec{r}$ は媒介変数 ϕ を使って $\vec{r} = \boxed{\text{ス}}\,\vec{A} + \boxed{\text{セ}}\,\vec{B}$ と表せる．曲線の形は媒介変数のとり方によらないので，この式の形から問題の曲線は $\boxed{\text{ソ}}$ であることが分かる．

解 まず始めに，$\vec{r}$ が θ の値によって定まることに注意する．したがって，以下の解答では $\vec{r}$ を $\vec{r}(\theta)$ と表記する．すなわち，

$$\vec{r}(\theta)=\cos\theta\,\vec{p}+\sin\theta\,\vec{q}$$

とおく．

$\left|\vec{r}(\theta)\right|$ の最大値と最小値が一致するということは，$\left|\vec{r}(\theta)\right|$ が一定であるということなので，動点 R の軌跡は点 O を中心とする円である．

$$\begin{aligned}\left|\vec{r}(\theta)\right|^2&=\cos^2\theta\left|\vec{p}\right|^2+(2\sin\theta\cos\theta)\vec{p}\cdot\vec{q}+\sin^2\theta\left|\vec{q}\right|^2\\&=\frac{1+\cos2\theta}{2}\left|\vec{p}\right|^2+(\sin2\theta)\vec{p}\cdot\vec{q}+\frac{1-\cos2\theta}{2}\left|\vec{q}\right|^2\\&=\frac{\sin2\theta}{2}2\vec{p}\cdot\vec{q}++\frac{\cos2\theta}{2}(\left|\vec{p}\right|^2-\left|\vec{q}\right|^2)+\frac{1}{2}(\left|\vec{p}\right|^2+\left|\vec{q}\right|^2)\\&=\frac{b}{2}\sin2\theta+\frac{a}{2}\cos2\theta+\frac{c}{2}\\&=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{c}{2}\\&=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{c}{2}\end{aligned}$$

ただし α は

$$\sin\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad\cos\alpha=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす角である．

ここで，$\left|\vec{r}(\theta)\right|$ が最大値をとるのは，$\sin(2\theta+\alpha)=1$ のとき．

このとき，$2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ より，$\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}+n\pi$

$\left|\vec{r}(\theta)\right|$ が最小値をとるのは，$\sin(2\theta+\alpha)=-1$ のとき．

このとき，$2\theta+\alpha=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$ より，$\theta=-\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}+n\pi$

$\vec{A}$，$\vec{B}$ の具体例として，たとえば，$n=0$ とすれば，

$$\vec{A}=\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\vec{p}+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\vec{q}$$

$$\vec{B}=\vec{r}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\vec{p}+\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\vec{q}$$

が得られる．

最大値と最小値を取る角は π 周期で存在する．

$$\vec{r}(\theta+\pi)=\cos(\theta+\pi)\,\vec{p}+\sin(\theta+\pi)\,\vec{q}=-\cos\theta\,\vec{p}-\sin\theta\,\vec{q}=-\vec{r}(\theta)$$

なので，$\left|\vec{r}(\theta)\right|$ が最大となるベクトルは，$\vec{A}$ と $-\vec{A}$，最小となるベクトルは，$\vec{B}$，$-\vec{B}$ であることが分かる．

$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}=t$ とおくと，

$$\vec{A}=\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{p}+\sin t\,\vec{q}$$

$$\vec{B}=\vec{r}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\vec{p}+\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\vec{q}=\sin t\,\vec{p}-\cos t\,\vec{q}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B}&=(\cos t\,\vec{p}+\sin t\,\vec{q})(\sin t\,\vec{p}-\cos t\,\vec{q})\\&=\sin t\cos t(\left|\vec{p}\right|^2-\left|\vec{p}\right|^2)-(\cos^2 t-\sin^2 t)\vec{p}\cdot\vec{q}\\&=\frac{\sin 2t}{2}\cdot a-\cos 2t\cdot\frac{b}{2}\\&=\frac{a}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\frac{b}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\&=\frac{a}{2}\cos\alpha-\frac{b}{2}\sin\alpha\\&=\frac{a}{2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{b}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\&=0\end{aligned}$$

さて，$\phi=\theta+k$ とおいて，$\phi=0$ のとき $\vec{r}(\theta)=\vec{A}=\vec{r}(t)$ となるように k を定めると，$k=-t$ となる．つまり，$\phi=\theta-t$ と変数変換する．このとき，

$$\begin{aligned}\vec{r}(\theta)&=\vec{r}(\phi+t)\\&=\cos(\phi+t)\,\vec{p}+\sin(\phi+t)\,\vec{q}\\&=(\cos\phi\cos t-\sin\phi\sin t)\,\vec{p}+(\sin\phi\cos t+\cos\phi\sin t)\,\vec{p}\\&=\cos\phi(\cos t\,\vec{p}+\sin t\vec{q})+\sin\phi(-\sin t\,\vec{p}+\cos t\,\vec{q})\\&=\cos\phi\,\vec{A}+\sin\phi\,(-\vec{B})\\&=\cos\phi\,\vec{A}+(-\sin\phi)\,\vec{B}\end{aligned}$$

ここで，$\vec{A}$ と $\vec{B}$ が直交するので，仮に $\vec{A}=\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}$，$\vec{B}=\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ とおく ($u>0$，$v>0$，$u\neq v$)．

点 R の動く曲線の形だけに注目するのでこのように設定しても一般性を失わない (なお，$u=\left|\vec{A}\right|$，$v=\left|\vec{B}\right|$ なので．最大値と最小値が異なる場合を検証しているので，$\left|\vec{A}\right|\neq\left|\vec{B}\right|$)．

$\vec{r}(\theta)=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\cos\phi\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}+(-\sin\phi)\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\cos\phi\\-v\sin\phi\end{pmatrix}$$

よって，$\left(\dfrac{X}{u}\right)^2+\left(\dfrac{Y}{-v}\right)^2=1$ より，$\dfrac{X^2}{u^2}+\dfrac{Y^2}{v^2}=1.$
つまり，点 R の軌跡は楕円になる．

<解答>

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
円	$\dfrac{c}{2}$	$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$	$2\theta+\alpha$	$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$	$-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$

キ	ク	ケ	コ	サ
$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$	$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$	$\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$	$-\vec{A},\ -\vec{B}$

シ	ス	セ	ソ
0	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	楕円

■