2023 年　奈良県立医大　推薦入試問題 (数学) 解答

【1】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ.

次の 2 つの放物線を考える.

$$y = x^2 + ax + \frac{1}{2}$$

$$y = -x^2 + bx$$

ただし, $a > b$ とする. この 2 つの放物線が 1 点で接するとき, a と b の間には $a =$ ア という関係が成り立つ. さらに, この接点の x 座標は $x =$ イ である. もし接点が放物線の極値をとる位置にあるならば, $b =$ ウ である.

考え方 2 次関数の基本問題です. 手が止まることは全く無いでしょう. 言うまでもなく「放物線の極値を取る位置」とは「放物線の頂点」のことです.

解 2 つの放物線の式を連立して,

$$x^2 + ax + \frac{1}{2} = -x^2 + bx$$

$$2x^2 + (a-b)x + \frac{1}{2} = 0 \cdots ①$$

この 2 つの放物線が 1 点で接するとき, この x の 2 次方程式 ① の判別式を D とすると, $D = 0$ となるので,

$$(a-b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$(a-b)^2 = 4$$

$a > b$ より

$$a - b = 2$$

$$\therefore \quad a = b + 2$$

このとき, 接点の x 座標は, ① の重解であるので,

$$x = -\frac{a-b}{4} = -\frac{1}{2}$$

放物線の極値を取る位置は, 放物線の頂点であるので,

$$\frac{b}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad b = -1$$

■

＜解答＞

ア	イ	ウ
$b+2$	$-\frac{1}{2}$	-1

【2】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

正整数 n に対し，$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\dfrac{1}{n-|k-l|}$ とおく．

(1) $S(2)=$ $\boxed{\text{ア}}$ ，$S(3)=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) a を $0\leqq a\leqq n-1$ なる整数とする．整数 k，l を $1\leqq k\leqq n$ かつ $1\leqq l\leqq n$ かつ $k-l=a$ という条件のもとで動かしたときの $\dfrac{1}{n-|k-l|}$ の総和は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) $S(n)=$ $\boxed{\text{エ}}$ である．

考え方 今年の問題の中で一番難しい問題でしょう．この問題の出来が合否に影響を与えたと思います．おそらく (1) は具体例なので問題ないでしょう．(2) が難しい．$S(4)$ や $S(5)$ を計算して様子を見れば何となく分かりますが，はたして，その余裕があるかどうか．(3) は一般形ですが，答えだけで良いので，$S(4)$ や $S(5)$ を計算して予想して答えるという手もアリでしょうね (⇨注 参照)．計算結果を詳しく観察すれば，(2) の答えもなんとなく分かります．

解

(1)

$$
\begin{aligned}
S(2)&=\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\frac{1}{2-|k-l|}\\
&=\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{2-|k-1|}+\frac{1}{2-|k-2|}\right)\\
&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{1}{1}\times 2+\frac{1}{2}\times 2\\
&=2+1\\
&=3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(3)&=\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\frac{1}{3-|k-l|}\\
&=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{3-|k-1|}+\frac{1}{3-|k-2|}+\frac{1}{3-|k-3|}\right)\\
&=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\\
&=\frac{1}{1}\times 2+\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{3}\times 3\\
&=2+2+1\\
&=5
\end{aligned}
$$

(2)

$k-l=a$ となる，k，l （$1\leqq k\leqq n$ かつ $1\leqq l\leqq n$） の組合せは

$$(k,\ l)=(a+1,\ 1),(a+2,\ 2),(a+3,\ 3),\cdots,(n,\ n-a)$$

の $n-a$ 通りある．

したがって，このときの，$\dfrac{1}{n-|k-l|}$ の総和は，$\dfrac{1}{n-a}\times(n-a)=1$ である．

(3)

$k-l=-a$ となる，k，l（$1 \leqq k \leqq n$ かつ $1 \leqq l \leqq n$）の組合せは，$l-k=a$ なので，$k-l=a$ となる場合と同じで，$n-a$ 通り．

したがって，$|k-l|=a$ となる，k，l の組合せは全部で $2(n-a)$ 通りあるので，

$\dfrac{1}{n-|k-l|}$ の総和は，$\dfrac{1}{n-a}\times 2(n-a)=2$

次に，$|k-l|=0$ となる，k，l の組合せは，$k=l$ の場合なので，n 通り．

このとき，$\dfrac{1}{n-|k-l|}$ の総和は，$\dfrac{1}{n}\times n=1$

したがって，$S(n)$ は，

$$S(n)=\left(\sum_{a=1}^{n-1}2\right)+1=2(n-1)+1=2n-1$$

■

注　ちなみに，$S(4)$，$S(5)$ を計算してみると，

$$\begin{aligned}
S(4)&=\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\frac{1}{4-|k-l|}\\
&=\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{4-|k-1|}+\frac{1}{4-|k-2|}+\frac{1}{4-|k-3|}+\frac{1}{4-|k-4|}\right)\\
&=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\\
&=\frac{1}{1}\times 2+\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{3}\times 6+\frac{1}{4}\times 4\\
&=2+2+2+1\\
&=7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(5)&=\sum_{k=1}^{5}\sum_{l=1}^{5}\frac{1}{5-|k-l|}\\
&=\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{5-|k-1|}+\frac{1}{5-|k-2|}+\frac{1}{5-|k-3|}+\frac{1}{5-|k-4|}+\frac{1}{5-|k-5|}\right)\\
&=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\\
&\qquad+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\\
&=\frac{1}{1}\times 2+\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{3}\times 6+\frac{1}{4}\times 8+\frac{1}{5}\times 5\\
&=2+2+2+2+1\\
&=9
\end{aligned}$$

このように，$S(2)$，$S(3)$，$S(4)$，$S(5)$ を計算すると，最後から 2 行目の式がいずれも「2＋2＋…＋2＋1」になっていることに気づくと思います．このことはつまり，

$S(n)$ に現れる分数 $\dfrac{1}{1}$ の総和が 2，$\dfrac{1}{2}$ の総和が 2，……，$\dfrac{1}{n-1}$ の総和が 2，$\dfrac{1}{n}$ の総和が 1

であることを意味しています．つまり，最終的な総和は，$2(n-1)+1=2n-1$ となります．

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ
3	5	1	$2n-1$

【3】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

xyz 空間の原点を O とする．空間内の 2 点 P(0, 1, 1)，Q(1, 0, −1) を通る直線を l とする．

(1) 点 R(x, y, z) が直線 l 上を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と表す．このとき，x，y，z は t の 1 次式として $x =$ [ア]，$y =$ [イ]，$z =$ [ウ] と表せる．

l を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を S とする．

(2) 曲面 S と平面 $z =$ [ウ] との交わりは円であり，その半径は [エ] である．

(3) 曲面 S の $z \geqq 0$ の部分と平面 $z = 0$ で囲まれた部分を内側とする容器を考える．初め空であったこの容器に単位時間あたり V の割合で水を注入する．高さ h まで容器に水が入ったとすると，それに要した時間は V と h を用いて [オ] と表される．

考え方 線分を回転させてできる立体に水を入れるという，一見複雑な問題ですが，一定の割合 V で水を入れる時に要する時間なので，結局，体積を求めて V で割るだけで解決します．

解 (1)

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ -1+2t \end{pmatrix}$$

(2) $z = -1 + 2t$ のとき，$x = 1 - t$，$y = t$ なので，断面の円の半径は

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1-t)^2 + t^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 1}$$

(3) 高さが h のときの容器の体積 W は

$$W = \pi \int_0^h \left(\sqrt{2t^2 - 2t + 1}\right)^2 dz = \pi \int_0^h (2t^2 - 2t + 1)\, dz$$

$z = -1 + 2t$ より，$dz = 2dt$ であり，

z	0	$\longrightarrow$	h
t	$\frac{1}{2}$	$\longrightarrow$	$\frac{h+1}{2}$

であるので,

$$
\begin{aligned}
W &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{h+1}{2}} 2(2t^2-2t+1)\,dt \\
&= 2\pi \left[\frac{2}{3}t^3 - t^2 + t \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{h+1}{2}} \\
&= 2\pi \left(\frac{2}{3}\left(\left(\frac{h+1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right) - \left(\left(\frac{h+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) + \left(\frac{h+1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{2}{3}\,\frac{h^3+3h^2+3h}{8} - \frac{h^2+2h}{4} + \frac{h}{2} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{h^3+3h^2+3h}{12} - \frac{h^2+2h}{4} + \frac{h}{2} \right) \\
&= 2\pi \frac{h^3+3h^2+3h-3(h^2+2h)+6h}{12} \\
&= \frac{(h^3+3h)\pi}{6}
\end{aligned}
$$

単位時間あたり V の割合で水を注入するときに要する時間は

$$
\frac{W}{V} = \frac{h(h^2+3)\pi}{6V}
$$

■

注 上の解答では t で積分しましたが，z で積分した方が圧倒的にラクです．つまり，

$$
W = \pi \int_0^h (2t^2-2t+1)\,dz
$$

$z=-1+2t$ より，$t=\dfrac{z+1}{2}$ なので,

$$
\begin{aligned}
W &= \pi \int_0^h (2t^2-2t+1)\,dz \\
&= \pi \int_0^h \left(2\left(\frac{z+1}{2}\right)^2 - 2\,\frac{z+1}{2} + 1 \right)\,dz \\
&= \pi \int_0^h \left(\frac{z^2+2h+1}{2} - (z+1) + 1 \right)\,dz \\
&= \pi \int_0^h \frac{z^2+1}{2}\,dz \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{z^3}{3} + z \right]_0^h \\
&= \frac{(h^3+3h)\pi}{6}
\end{aligned}
$$

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ
$1-t$	t	$-1+2t$	$\sqrt{2t^2-2t+1}$	$\dfrac{h(h^2+3)\pi}{6V}$

【4】 以下の空欄を適切に埋めて文章を完成させよ．

項数 200 の等差数列 a_1，…，a_{200} を考える．$a_3 = 14$，$a_8 = 29$ である．

(1) この数列の第 5 項は $a_5 =$ ア ，末項は $a_{200} =$ イ であり，すべての項を足した値は $a_1 + \cdots + a_{200} =$ ウ ．

(2) k が 10 の倍数であるような a_k をすべて足した値は $a_{10} + a_{20} + \cdots + a_{200} =$ エ ．
また，10 の倍数でも 15 の倍数でもないような k について，a_k をすべて足した値は
$a_1 + \cdots + a_9 + a_{11} + \cdots + a_{14} + a_{16} + \cdots + a_{199} =$ オ ．

考え方 基本問題です．等差数列の項を，一定間隔で抜き出した項もまた等差数列になることはほとんど自明ですが，きちんとΣ計算で解いてみます．

解

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると，
$a_3 = 14$ より，$a_1 + 2d = 14$
$a_8 = 29$ より，$a_1 + 7d = 29$
よって，$a_1 = 8$，$d = 3$
したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 8 + 3(n-1) = 3n + 5$$

よって，$a_5 = 20$，$a_{200} = 605$.
初項から末項までの和は

$$\frac{200(a_1 + a_{200})}{2} = \frac{200(8+605)}{2} = 61300$$

(2) k が 10 の倍数となる項は，a_{10}，a_{20}，…，a_{200} の 20 項あり，その和は，

$$\begin{aligned} &a_{10} + a_{20} + \cdots + a_{200} \\ =&\sum_{k=1}^{20} a_{10k} \\ =&\sum_{k=1}^{20} (30k+5) \\ =&30 \cdot \frac{20(20+1)}{2} + 20 \times 5 \\ =&6400 \end{aligned}$$

k が 15 の倍数となる項は，a_{15}，a_{30}，…，a_{195} の 13 項あり，その和は，

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{13} a_{15k} \\ =&\sum_{k=1}^{13} (45k+5) \\ =&45 \cdot \frac{13(13+1)}{2} + 13 \times 5 \\ =&4160 \end{aligned}$$

k が 30 の倍数となる項は，a_{30}，a_{60}，…，a_{180} の 6 項あり，その和は，

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{6} a_{30k} \\ =&\sum_{k=1}^{6} (90k+5) \\ =&90 \cdot \frac{6(6+1)}{2} + 6 \times 5 \\ =&1920 \end{aligned}$$

したがって，求める和は

$$61300 - 6400 - 4160 + 1920 = 52660$$

■

＜解答＞

ア	イ	ウ	エ	オ
20	605	61300	6400	52660

【5】 以下の問に答えよ．

(1) x の整式 x^4+x^2+1 を 2 つの 2 次式の積に因数分解せよ．

(2) 任意の正整数 n に対して，不等式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1}<\frac{1}{2}$ が成り立つことを証明せよ．

考え方 (1) の因数分解はどこかしらでやったことあるでしょう．(2) の分数式の和も，「部分分数に分ける」が定石．(1) の誘導があるので分けれると思います．ポイントは「差の形」が見抜けるかどうかですね．

解

(1)

$$\begin{aligned}&x^4+x^2+1\\=&x^4+2x^2+1-x^2\\=&(x^2+1)^2-x^2\\=&(x^2+1+x)(x^2+1-x)\\=&(x^2+x+1)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&\frac{k}{k^4+k^2+1}\\=&\frac{k}{(k^2+k+1)(k^2-k+1)}\\=&\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right)\times\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$f(k)=k^2-k+1$ とおくと，

$$f(k+1)=(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+k+1$$

なので，

$$\frac{k}{k^4+k^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f(k)}-\frac{1}{f(k+1)}\right)$$

よって，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1}\\=&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f(k)}-\frac{1}{f(k+1)}\right)\\=&\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(2)}\right)+\left(\frac{1}{f(2)}-\frac{1}{f(3)}\right)+\cdots\right.\\&\left.\cdots+\left(\frac{1}{f(n-1)}-\frac{1}{f(n)}\right)+\left(\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{f(n+1)}\right)\right\}\\=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(n+1)}\right)\\=&\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right)\\=&\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n^2+n+1)}\\<&\frac{1}{2}\end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1}<\frac{1}{2}$$

■