# 漸化式ハンドブック
# （ver4.0）

漸化式

ハノイの塔でも　使えます

この世の終わりも
分かっちゃう

意味

ハノイの塔で 64 枚の円盤の移動が完了すればこの世がおわるという伝説がある．この恐ろしい伝説も，漸化式の力を借りれば解明されるという，漸化式の不思議さ，壮大さ，面白さを読んだ名歌．詠み人知らず．

★ Type ① $a_{n+1}=a_n+q$ （$q$ は定数）

★ Type ② $a_{n+1}=pa_n$ （$p$ は定数）

★ Type ③ $a_{n+1}=pa_n+q$ （$p$，$q$ は定数）

★ Type ④ $a_{n+1}=a_n+f(n)$ （$f(n)$ は $n$ の式）

★★ Type ⑤ $a_{n+1}=pa_n+q^n$

★★★ Type ⑥ $a_{n+1}=pa_n+$（$n$ の 1 次式）

★★ Type ⑦ $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{ra_n+s}$

★★★★ Type ⑧ $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$

★★★ Type ⑨ $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$
$\longrightarrow$ 特性方程式 $t^2+pt+q=0$ が異なる 2 解をもつ場合

★★★ Type ⑩ $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$
$\longrightarrow$ 特性方程式 $t^2+pt+q=0$ が重解をもつ場合

★★★ Type ⑪ ナナメの係数が等しい連立漸化式 $\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=qa_n+pb_n\end{cases}$

★★★ Type ⑫ 一般的な連立漸化式 $\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n\end{cases}$

★★★★ Type ⑬ 係数に $n$ などを含むタイプ

★★★★ Type ⑭ 累乗型

★★ Type ⑮ $S_n$ を含んだ漸化式

★★★ Type ⑯ 解けない漸化式

★★★ **番外編** 自分で漸化式を立てる問題

★ → 漸化式の根底をなす最重要基本パターン
★★ → 絶対にマスターすべき最重要パターン（最低ここまでは完璧に）
★★★ → 理系は（おそらく）ノーヒント，文系は（おそらく）誘導付きで出題される重要パターン
★★★★ → 文系理系とも（おそらく）誘導付きで出題される重要パターン

理系志望は★★★まで，文系志望は★★までを完璧にマスターすることを目標にしよう．
★～★★★をしっかりと理解しておけば，★★★★は誘導に従えば解けるので，解き方を知らなくても大丈夫ですが，ひととおりは経験しておいたほうが良いでしょう．

★ Type ①　$a_{n+1}=a_n+q$　（$q$ は定数）　$\longrightarrow$　**公差 $q$ の等差数列**

解　等差数列の一般項の公式に当てはめるだけ．
つまり，$a_n=a_1+(n-1)q$

例題 1　$a_1=1$,　$a_{n+1}=a_n+4$

解　数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 4 の等差数列なので，

$a_n=1+(n-1)\times 4=4n-3$

■

演習 1　$a_1=-1$,　$a_{n+1}=a_n-3$

★ Type ②　$a_{n+1}=pa_n$　（$p$ は定数）　$\longrightarrow$　**公比 $p$ の等差数列**

解　等比数列の一般項の公式に当てはめるだけ．
つまり，$a_n=a_1p^{n-1}$

例題 2　$a_1=3$,　$a_{n+1}=2a_n$

解　数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公比 2 の等比数列なので，

$a_n=3\cdot 2^{n-1}$

■

演習 2　$a_1=2$,　$a_{n+1}=-2a_n$

このように，Type ①，Type ② の漸化式は，等差数列，等比数列の性質をそのまま表現しているだけなので，取り立てて大騒ぎすることはありません．一般項の公式に当てはめるだけです．見た目にビビらず式の意味をしっかり考えよう．

★ $\boxed{\text{Type ③}}$ $a_{n+1} = pa_n + q$ （$p$，$q$ は定数，$p \neq 1$ かつ $q \neq 0$）

**解** $\alpha = p\alpha + q$ **を満たす** $\alpha$ **を用いて** $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ **と変形**

↓

**数列** $\{a_n - \alpha\}$ **が初項** $a_1 - \alpha$**，公比** $p$ **の等比数列になる**

↓

$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1}$ **より，** $a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$

✎注　$p = 1$ ならば $\boxed{\text{Type ①}}$，$q = 0$ ならば $\boxed{\text{Type ②}}$ になります．

✎注　そもそも「なぜ，このように解くのか」については犬プリを参照のこと．

**例題** 3　(1)　$a_1 = 2$，　$a_{n+1} = 3a_n - 2$　　(2)　$a_1 = 1$，　$2a_{n+1} - a_n + 2 = 0$

**解**

(1)（$\alpha = 3\alpha - 2$ より $\alpha = 1$ ⟵ ズラす数）

**※この計算は答案には出さない**

漸化式より，$a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$

よって，数列 $\{a_n - 1\}$ が初項 $a_1 - 1$，公比 3 の等比数列なので，

$$
\begin{aligned}
a_n - 1 &= (a_1 - 1)3^{n-1} \\
&= (2 - 1)3^{n-1} \\
&= 1 \cdot 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

したがって，$a_n = 3^{n-1} + 1$

■

(2)

$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n - 1$（⟵ **この形に変形**）

（$\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha - 1$ より $\alpha = -2$ ⟵ ズラす数）

**※この計算は答案には出さない**

漸化式より，$a_{n+1} + 2 = \dfrac{1}{2}(a_n + 2)$

よって，数列 $\{a_n + 2\}$ が初項 $a_1 + 2$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列なので，

$$
\begin{aligned}
a_n + 2 &= (a_1 + 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= (1 + 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

したがって，$a_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} - 2$

■

**演習** 3　(1)　$a_1 = 1$，　$a_{n+1} = 4a_n + 3$　　(2)　$a_1 = 0$，　$2a_{n+1} - 3a_n = 1$

この $\boxed{\text{Type ③}}$ の漸化式は，すべての漸化式の基礎となる重要な漸化式です．どんなにややこしい漸化式も，うまく変形したり，置き換えしたりすれば，たいていこの Type になります．なので，確実に解けるようになること．

★ $\boxed{\text{Type ④}}$ $a_{n+1}=a_n+f(n)$ （$f(n)$ は $n$ の式）

**解** $a_{n+1}-a_n=f(n)$ より，**数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $f(n)$ になるので，階差数列の解法パターンに持ち込む**．つまり，

$n \geqq 2$ のとき，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

**注** 最後に，$n=1$ の場合の確認を忘れないこと．

例題 4 $a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+4^n$

**解** $a_{n+1}-a_n=4^n$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $4^n$ である．
したがって，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1} 4^k \\
&= 1+\frac{4^1(1-4^{n-1})}{1-4} \\
&= 1+\frac{4^n-4}{3} \\
&= \frac{4^n-1}{3} \quad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

① において $n=1$ とすると，$a_1=\frac{4^1-1}{3}=1$ となり，$a_1=1$ に一致する．
よって，① は $n \geqq 1$ で成立する．

$$\therefore\quad a_n=\frac{4^n-1}{3}\quad (n \geqq 1)$$

■

**演習** 4 $a_1=2,\quad a_{n+1}=a_n+n^2+n$

$\boxed{\text{Type ④}}$ の漸化式は，階差数列の性質をそのまま表現しているだけなので，取り立てて大騒ぎすることはありません．階差数列の解法パターンに当てはめるだけです．見た目にビビらず式の意味をしっかり考えよう．

★★ $\boxed{\text{Type ⑤}}$ $a_{n+1} = pa_n + q^{■}$（$\longleftarrow$ $q$ の指数型 ただし $p \neq 1$）

**解** **両辺を $q^{n+1}$ で割る** $\longrightarrow$ $\dfrac{a_n}{q^n} = b_n$ **と置き換えれば** $\boxed{\text{Type ③}}$

✏注 $p = 1$ ならば $\boxed{\text{Type ④}}$ になります．

**例題** 5　$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

**解** 両辺を $3^{n+1}$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2a_n}{3^{n+1}} + \frac{3^n}{3^{n+1}}$$
$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$$

ここで，$\dfrac{a_n}{3^n} = b_n$ とおくと，

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3} \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}$$

よって，$b_{n+1} - 1 = \dfrac{2}{3}(b_n - 1)$．

つまり，数列 $\{b_n - 1\}$ は，初項 $b_1 - 1$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列なので，

$$\begin{aligned} b_n - 1 &= (b_1 - 1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{a_1}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

$$\therefore \quad b_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{2^n}{3^n}$$

$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ より，$a_n = 3^n b_n = 3^n - 2^n$

■

✏注 両辺を $p^{n+1}$ で割る方法もあります．この場合，$\dfrac{a_n}{q^n} = c_n$ と置き換えれば $\boxed{\text{Type ④}}$ に帰着します．

$\boxed{\text{別解}}$ 両辺を $2^{n+1}$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2^{n+1}} + \frac{3^n}{2^{n+1}}$$
$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

よって，$\dfrac{a_n}{2^n} = c_n$ とおくと，

$$c_{n+1} = c_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ④}}$$

$c_{n+1} - c_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ より，数列 $\{c_n\}$ の階差数列の一般項が $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ である．

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \\ &= \frac{a_1}{2^1} + \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}\left\{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

① において $n = 1$ とすると，$c_1 = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$ となり，$c_1 = \dfrac{1}{2}$ に一致する．よって，① は $n \geqq 1$ で成立する．

$$\therefore \quad c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = \frac{3^n}{2^n} - 1 \quad (n \geqq 1)$$

$c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ より，$a_n = 2^n c_n = 3^n - 2^n$

■

✏注 手間を考えると，**解** の方法が一般的ですが，$\boxed{\text{別解}}$ のように誘導される場合も無きにしも非ずなので，いちおう頭に入れておこう．

**演習** 5　$a_1 = 0$，$a_{n+1} = 4a_n - 2^{n+1}$

★★★ $\boxed{\text{Type ⑥}}$　$a_{n+1}=pa_n+(n\text{ の 1 次式})$

**解** 1.（微調整型）

**まずは，$\boxed{\text{Type ③}}$ を真似て変形．その後，両辺に数を加えて（引いて）微調整し，うまく置き換えできる形に変形する．**

**解** 2.（理想追求型）

**$b_n=a_n+\alpha n+\beta$ と置き換える．**
**数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるように $\alpha$，$\beta$ を定める．**

**解** 3.（コツコツ型）

**$n$ のレベルを 1 コあげて辺々を引き，階差数列に持ち込む．**

3 通りの解法を紹介しますが，テストなどでノーヒントで出題された場合は自分の好きな解法で解いて構いません．三者三様，一長一短です．でも，誘導付きで出題されることもあるので，誘導を見て「あ，あの解法でやらせようとしてるんだな」と察知する必要はあります．なので，3 つの解法をすべて「理解」しておくことは重要です．

例 題 6　　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$

**解** 1.（微調整型）

(1)（$\alpha=3\alpha+4n$ より $\alpha=-2n$）

**※この計算は答案には出さない**

漸化式より，$a_{n+1}+2n=3(a_n+2n)$

**両辺に 2 を加える**と，

$$a_{n+1}+2n+2=3(a_n+2n)+2$$

$$a_{n+1}+2(n+1)=3(a_n+2n)+2$$

$b_n=a_n+2n$ とおくと

$$b_{n+1}=3b_n+2 \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}$$

よって，$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$ より，数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 $b_1+1$，公比 3 の等比数列なので，

$$\begin{aligned}b_n+1&=(b_1+1)3^{n-1}\\&=(3+1)3^{n-1}\\&=4\cdot 3^{n-1}\end{aligned}$$

$(a_1=1$ より，$b_1=a_1+2=3)$

$$\therefore\ b_n=4\cdot 3^{n-1}-1$$

よって，

$$a_n=b_n-2n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$$

■

**注**　この解法のポイントは，$\boxed{\text{Type ③}}$ を真似て変形したあと，両辺に 2 を加えたことにあります．なぜ，2 を加えようと思ったか分かりますか？

$\boxed{\text{Type ③}}$ の漸化式

$$a_{n+1}=3a_n+4$$

を変形すると

$$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$$

となり，$a_n+2=b_n$ という置き換えで，

$$b_{n+1}=3b_n$$

となり解くことができました．

今回の漸化式 $a_{n+1}=3a_n+4n$ も，この変形を真似て，

$$a_{n+1}+2n=3(a_n+2n)$$

としたわけです．

この式を見ると，スッキリした式ではありますが，このままでは置き換えすることができません．

なせなら，もし $a_n+2n=b_n$ と置き換えるとするなら，$b_{n+1}=a_{n+1}+2(n+1)$ となるはずなのに，左辺は $a_n+2n$ だからです．ということは，$+2$ が不足しています．だから，両辺に 2 を加える必要があるのです．こうすることで，$a_n+2n=b_n$ という置き換えが可能になります．

このように，両辺にテキトーな数を加減して置き換えできる形に近づけるのがこの解法のコツです．

**解** 2.（理想追求型）

$a_{n+1}=3a_n+4n$ において，$b_n=a_n+\alpha n+\beta$ とおく．このとき，数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるような $\alpha$，$\beta$ を求める．

$a_n=b_n-\alpha n-\beta$ より，

$a_{n+1}=b_{n+1}-\alpha(n+1)-\beta$.

$a_{n+1}=3a_n+4n$ に代入すると，

$b_{n+1}-\alpha(n+1)-\beta=3(b_n-\alpha n-\beta)+4n$

$b_{n+1}-\alpha n-\alpha-\beta=3b_n-3\alpha n-3\beta+4n$

$b_{n+1}=3b_n+(4-2\alpha)n+\alpha-2\beta$

数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるには

$$4-2\alpha=0,\qquad \alpha-2\beta=0$$

であればよく，$\alpha=2$，$\beta=1$.

よって，$a_{n+1}=3a_n+4n$ において

$b_{n+1}=a_n+2n+1$ と置き換えれば，

$$b_{n+1}=3b_n \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ②}}$$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1$，公比 3 の等比数列なので，

$$b_n=b_1 3^{n-1}=(a_1+2\cdot1+1)3^{n-1}=4\cdot3^{n-1}$$

したがって，

$$a_n+2n+1=4\cdot3^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1$$

■

**注** 逆から考えても構いません．つまり，もとの漸化式 $a_{n+1}=3a_n+4n$ が，

$$a_{n+1}=3a_n+4n$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=3(a_n+\alpha n+\beta)$$

のような形に変形できたと仮定するのです．

展開して，整理すると，

$$a_{n+1}=3a_n+2\alpha n+2\beta-\alpha$$

これがもとの漸化式 $a_{n+1}=3a_n+4n$ と一致するので，$n$ についての恒等式と考えて係数比較して

$$2\alpha=4,\quad 2\beta-\alpha=0$$

$$\therefore\ \alpha=2,\ \beta=1$$

したがって，$a_{n+1}=3a_n+4n$ は

$$a_{n+1}+2(n+1)+1=3(a_n+2n+1)$$

という形に変形できることが分かります．

ここで，$a_n+2n+1=b_n$ と置くのです．

**注** この **解** 2. の手法は共通テスト型のマーク式の問題や誘導つきで出題されることが多く，最近では，こちらの方がトレンドです．

**注** 本質的に，**解** 1. と全く同じことをやっています．

**解** 3.（コツコツ型）

漸化式 $a_{n+1}=3a_n+4n$ において，$n$ を $n+1$ に置き換えた式 $a_{n+2}=3a_{n+1}+4(n+1)$ を考えて，辺々を引くと，

$$\begin{array}{rcrcl} a_{n+2} & = & 3a_{n+1} & + & 4(n+1) \\ a_{n+1} & = & 3a_n & + & 4n \\ \hline \end{array}$$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+4 \quad \cdots\cdots(※)$$

ここで，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと，（※）式は

$$b_{n+1}=3b_n+4 \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}$$

よって，$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$ より，数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 $b_1+2$，公比 3 の等比数列なので，

$$\begin{aligned} b_n+2 &= (b_1+2)3^{n-1} \\ &= (6+2)3^{n-1} \\ &= 8\cdot3^{n-1} \end{aligned}$$

（$a_1=1$ より $a_2=3a_1+4=7$.

よって $b_1=a_2-a_1=7-1=6$）

$$\therefore\quad b_n=8\cdot3^{n-1}-2$$

$$a_{n+1}-a_n=8\cdot3^{n-1}-2 \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ④}}$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $8\cdot 3^{n-1}-2$ なので，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot 3^{k-1}-2) \\ &= 1 + 8\frac{3^0(1-3^{n-1})}{1-3} - 2(n-1) \\ &= 4\cdot 3^{n-1} - 2n - 1 \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

① において $n=1$ とすると，$a_1 = 4\cdot 3^0 - 2 - 1 = 1$ となり，$a_1 = 1$ に一致する．

よって，① は $n \geqq 1$ で成立する．

$$\therefore\ \ a_n = 4\cdot 3^{n-1} - 2n - 1\ \ (n \geqq 1)$$

■

**注** $b_1 = a_2 - a_1$ なので，$b_1$ を求めるには $a_1$ と $a_2$ が必要です．$a_2$ はもとに漸化式から自分で求めます．

**注** **解** 3. は，あくまでも「漸化式としての解法パターン」に従って解いたので，階差数列を利用しました．しかし，実戦的には階差の式と元の漸化式を連立して

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 8\cdot 3^{n-1} - 2 \\ a_{n+1} = 3a_n + 4n \end{cases}$$

より，$a_{n+1}$ を消去し $a_n$ を求める方が簡単だし，早いです．つまり，

$$3a_n + 4n - a_n = 8\cdot 3^{n-1} - 2$$

$$2a_n = 8\cdot 3^{n-1} - 4n - 2$$

$$\therefore\ \ a_n = 4\cdot 3^{n-1} - 2n - 1$$

まあ，でも，最初は階差数列の公式の練習もかねて，**解** 3. の方法で勉強しておきましょう．

コツコツ型は，メンドウですが，これまでのタイプにどんどん帰着させていくという意味においては堅実な解法だと思います．

**参考** $a_{n+1} = pa_n + (n$ の 2 次式$)$ の場合はどうなるのでしょうか．例えば，

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2a_n + n^2$$

の場合は，**解** 1. の方法だと全く解けません（単純に数を加減するだけでは無理だから）が，**解** 2. と **解** 3. の方法だと解くことができます．しかし，かなりメンドウで，特に **解** 3. は悲劇的にメンドウです．なぜなら，2 回引き算をしなければならず，階差数列の計算も 2 回必要だからです（やれば分かります）．**解** 2. の方法だと，2 次式なので $b_n = a_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ と置き換え，数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるように $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を定めれば良いので，ここさえクリアできれば，ほぼ終了です．

いずれにせよ，メンドクサイことこの上ない漸化式ですが，このように「ただメンドウなだけ」の漸化式が入試本番で出題されることは考えにくく，そこまで真剣に扱う必要はないでしょう．

ちなみに答えは

$$a_n = 7\cdot 2^{n-1} - n^2 - 2n - 3$$

になるので，各自でやってみてください．詳しい解説は犬プリに載っています．

**演習** 6　　$a_1 = 2,\quad a_{n+1} = 2a_n - 2n + 1$

**注** 先ほど紹介した 3 通りの解法でやってみよう．

★★ $\boxed{\text{Type ⑦}}$ $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{ra_n+s}$

**解** ($a_n \fallingdotseq 0$ を確認した上で)**両辺の逆数をとる**

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Type ①}}$ または $\boxed{\text{Type ③}}$ に帰着

例題 7 (1) $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{a_n+3}$ (2) $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$

**解**

(1) $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{a_n+3}$ において $a_{n+1}=0$ とすると $a_n=0$. これを繰り返すと

$$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=0$$

となり, $a_1=1\fallingdotseq 0$ と矛盾するので, $a_n\fallingdotseq 0$ $(n\geqq 1)$

したがって, 両辺の逆数をとると,

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+3}{3a_n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{a_n}$$

ここで, $\dfrac{1}{a_n}=b_n$ と置くと, $b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$ であり,

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{3} \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ①}}$$

数列 $\{b_n\}$ は, 初項 $b_1$, 公比 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列なので,

$$b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n+2}{3}$$

よって, $a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{3}{n+2}$

■

(2) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$ において $a_{n+1}=0$ とすると $a_n=0$. これを繰り返すと

$$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=0$$

となり, $a_1=\dfrac{1}{2}\fallingdotseq 0$ と矛盾するので, $a_n\fallingdotseq 0$ $(n\geqq 1)$

したがって, 両辺の逆数をとると,

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}=2+\frac{3}{a_n}$$

ここで, $\dfrac{1}{a_n}=b_n$ と置くと, $b_1=\dfrac{1}{a_1}=2$ であり,

$$b_{n+1}=3b_n+2 \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}$$

よって, $b_{n+1}+1=3(b_n+1)$ より, 数列 $\{b_n+1\}$ は, 初項 $b_1+1$, 公比 3 の等比数列なので,

$$b_n+1=(b_1+1)3^{n-1}=(2+1)3^{n-1}=3\cdot3^{n-1}=3^n$$

$$\therefore \quad b_n=3^n-1$$

よって, $a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3^n-1}$

■

**注** $a_n\fallingdotseq 0$ であることの証明ですが, 厳密には数学的帰納法による証明をせねばなりませんが, この程度で十分でしょう.

時間がなければ「漸化式より $a_n\fallingdotseq 0$ なので」とだけでも書いておけば, まあ大丈夫でしょう.

演習 7 (1) $a_1=\dfrac{1}{5}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+1}$ (2) $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2-a_n}$

★★★★ $\boxed{\text{Type ⑧}}$ $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$

**解　とにかく誘導に従う**

✍注　その「誘導」の意味するところについては，犬プリを参照のこと．

例題 8　　$a_1=4,\quad a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$

（1）$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は等比数列になることを示し，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．
（2）（1）を利用して，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

考え方　「数列 $\{b_n\}$ は等比数列になる」とは，「$b_{n+1}=pb_n$ が成立する」ということです．よって，この形を目指して変形します．

解

（1）$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ より，$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+4}$．
漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ を代入すると，

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+4}=\frac{\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}-2}{\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}+4}$$
$$=\frac{4a_n+8-2(a_n+6)}{4a_n+8+4(a_n+6)}=\frac{2a_n-4}{8a_n+32}$$
$$=\frac{1}{4}\frac{a_n-2}{a_n+4}=\frac{1}{4}b_n \longleftarrow \boxed{\text{Type ②}}$$

また，$b_1=\dfrac{a_1-2}{a_1+4}=\dfrac{4-2}{4+4}=\dfrac{1}{4}$

∴ 数列 $\{b_n\}$ は，初項 $\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列．

$$b_n=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{4^n}$$

（2）

$$\frac{a_n-2}{a_n+4}=\frac{1}{4^n}$$
$$a_n+4=4^n(a_n-2)$$
$$a_n+4=4^na_n-2\cdot 4^n$$
$$(4^n-1)a_n=2\cdot 4^n+4$$
$$\therefore\ a_n=\frac{2(4^n+2)}{4^n-1}$$

■

✍注　数列 $\{b_n\}$ が等比数列かどうかわからない場合, つまり, $b_{n+1}$ と $b_n$ の関係を一般的に調べるには, 次のようにするしかありません．$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ を $a_n$ について解いて，もとの漸化式に代入するのです．

別解　$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ より

$$b_n(a_n+4)=a_n-2$$
$$a_nb_n+4b_n=a_n-2$$
$$a_n(b_n-1)=-4b_n-2$$
$$a_n=\frac{-4b_n-2}{b_n-1}$$

したがって，$a_{n+1}=\dfrac{-4b_{n+1}-2}{b_{n+1}-1}$．

これらを，漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ に代入して計算すると，$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n$ が得られる．

■

演習 8　　$a_1=8,\quad a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}$

（1）$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ．
（2）（1）を利用して，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

★★★ $\boxed{\text{Type ⑨}}$ $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$

⟶ **特性方程式** $t^2+pt+q=0$ **が異なる** 2 **つの解** $\alpha$**，**$\beta$ **をもつ場合**

**解** 次のように 2 通りに変形する．

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) & \cdots ① \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

① より，数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ が初項 $a_2-\alpha a_1$，公比 $\beta$ の等比数列になるので，

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1} \quad \cdots ①'$$

② より，数列 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ が初項 $a_2-\beta a_1$，公比 $\alpha$ の等比数列になるので，

$$a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1} \quad \cdots ②'$$

①$'$ − ②$'$ より（辺々を引く），$(\beta-\alpha)a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}$

$$a_n=\frac{1}{\beta-\alpha}\left\{(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}\right\} \quad \cdots\cdots(※)$$

上記の一般論は流れを確認する程度にし，とにかく具体例で慣れることです．
くれぐれも最後の式（※）を丸暗記したりしないように．

**例 題** 9

（1）$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$
（2）$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=-3a_{n+1}+4a_n$

**解**

（1）（$t^2-5t+6=0$ より $t=2$，$3$） ⟵ **この計算は答案には出さない**

漸化式より，

$$\begin{cases} a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n) & \cdots ① \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

① より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1$，公比 3 の等比数列なので，

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)3^{n-1}=3^{n-1} \quad \cdots ①'$$

② より，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1$，公比 2 の等比数列なので，

$$a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)2^{n-1}=2^{n-1} \quad \cdots ②'$$

①$'$ − ②$'$ より（辺々を引く），$a_n=3^{n-1}-2^{n-1}$

■

(2) ($t^2 = -3t + 4$ より，$t = -4,\ 1$) ⟵ **この計算は答案には出さない**

漸化式より，

$$\begin{cases} a_{n+2} + 4a_{n+1} = a_{n+1} + 4a_n & \cdots ① \\ a_{n+2} - a_{n+1} = -4(a_{n+1} - a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

① より，数列 $\{a_{n+1} + 4a_n\}$ は初項 $a_2 + 4a_1$，公比 1 の等比数列なので，

$$a_{n+1} + 4a_n = (a_2 + 4a_1)1^{n-1} = 6 \ \cdots ①'$$

② より，数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は初項 $a_2 - a_1$，公比 $-4$ の等比数列なので，

$$a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1)(-4)^{n-1} = (-4)^{n-1} \ \cdots ②'$$

①$'$ − ②$'$ より (辺々を引く)，$5a_n = 6 - (-4)^{n-1}$．よって，$a_n = \dfrac{6 - (-4)^{n-1}}{5}$

■

➾**注** (2) のように特性方程式の解に $t = 1$ がある場合は，(2) の ①$'$ が Type ③ そのものなので，この漸化式を解けば $a_n$ が簡単に求められます．② は不要です．

**参考** **裏技** 解答を振り返ると

(1) は $t = 3,\ 2$ で，$a_n = 3^{n-1} - 2^{n-1}$，(2) は $t = 1,\ -4$ で，$a_n = \dfrac{6 - (-4)^{n-1}}{5}$

つまり，特性方程式の解を $\alpha$，$\beta$ とおくと

$$a_n = A \cdot \alpha^{n-1} + B \cdot \beta^{n-1}$$

という形で表現できていることに気づくでしょう．このことは，式 (※) を見れば当然のことです．このことを知っていると次のような解答になります．

**別解**

(1) $t = 3,\ 2$ より，$a_n = A \cdot 3^{n-1} + B \cdot 2^{n-1}$ とおける．

このとき，$a_1 = A + B = 0$，$a_2 = 3A + 2B = 1$ より，$A = 1$，$B = -1$．

よって，$a_n = 3^{n-1} - 2^{n-1}$

(2) $t = 1,\ -4$ より，$a_n = A \cdot 1^{n-1} + B \cdot (-4)^{n-1}$ とおける．

このとき，$a_1 = A + B = 1$，$a_2 = A - 4B = 2$ より，$A = \dfrac{6}{5}$，$B = -\dfrac{1}{5}$．

よって，$a_n = \dfrac{6}{5} - \dfrac{1}{5}(-4)^{n-1} = \dfrac{6 - (-4)^{n-1}}{5}$

■

最初に特性方程式を解き，その解 $\alpha$，$\beta$ を用いて，$a_n = A \cdot \alpha^{n-1} + B \cdot \beta^{n-1}$ とおきます．ここに $n = 1,\ 2$ を代入して係数 $A$，$B$ を決定します．この解法は圧倒的に早いですね．記述式のテストでこの解法を使うとおそらく文句を言われますが，答えだけでよいテストならどんどん使って構いません．

**演習** 9

(1) $a_1 = 1$，$a_2 = 4$，$a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$

(2) $a_1 = 0$，$a_2 = 1$，$a_{n+2} - 8a_{n+1} + 7a_n = 0$

★★★ $\boxed{\text{Type ⑩}}$ $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$

$\longrightarrow$ **特性方程式 $t^2+pt+q=0$ が重解 $\alpha$ をもつ場合**

**解** $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形

$\downarrow$

数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ が初項 $a_2-\alpha a_1$，公比 $\alpha$ の等比数列になる.

$\downarrow$

$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\alpha^{n-1}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Type ⑤}}$ に帰着する

例題 10　$a_1=1$，　$a_2=4$，　$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

**解** （$t^2-6t+9=0$ より $t=3$(重解)） $\longleftarrow$ **この計算は答案には出さない**

漸化式より，

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$$

よって，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1$，公比 3 の等比数列なので，

$$a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)3^{n-1}=3^{n-1}$$

$$a_{n+1}=3a_n+3^{n-1} \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ⑤}}$$

**両辺を $3^{n+1}$ で割る**と，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{3a_n}{3^{n+1}}+\frac{3^{n-1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{9}$$

よって，$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと，$b_1=\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{1}{3}$ で，

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{9} \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ①}}$$

つまり，数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1$，公差 $\dfrac{1}{9}$ の等差数列なので，

$$b_n=b_1+(n-1)\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{9}=\frac{n+2}{9}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ より，

$$a_n=3^nb_n=3^n\cdot\frac{n+2}{9}=(n+2)3^{n-2}$$

■

**注** 特性方程式が重解をもつ場合は，$\boxed{\text{Type ⑨}}$ の最後に紹介した **裏技** は使えません.

**演習** 10　$a_1=0$，　$a_2=2$，　$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

★★★ $\boxed{\text{Type ⑪}}$ ナナメの係数が等しい連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = qa_n + pb_n \end{cases}$$

**解** 1. **和と差を考える**（加減法的解法）
**解** 2. $a_n$ **だけの式にする**（代入法的解法）

$\boxed{\text{例 題}}$ 11　$a_1 = 2,\quad b_1 = 1,\quad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n & \cdots ② \end{cases}$

**解** 1.（**加減法的解法**）
①＋② より，

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_n + 4b_n = 4(a_n + b_n)$$

$a_n + b_n = c_n$ とおくと，$c_{n+1} = 4c_n$
よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $c_1$，公比 4 の等比数列なので，

$$c_n = c_1 4^{n-1} = (a_1 + b_1)4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n + b_n = 3 \cdot 4^{n-1}\quad \cdots ③$$

①－② より，

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n - 2b_n = 2(a_n - b_n)$$

$a_n - b_n = d_n$ とおくと，$d_{n+1} = 2d_n$
よって，数列 $\{d_n\}$ は，初項 $c_1$，公比 2 の等比数列なので，

$$d_n = d_1 2^{n-1} = (a_1 - b_1)2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n - b_n = 2^{n-1}\quad \cdots ④$$

したがって，
③＋④ より，$2a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 2^{n-1}$.　$\therefore\ a_n = \dfrac{3 \cdot 4^{n-1} + 2^{n-1}}{2}$
③－④ より，$2b_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 2^{n-1}$.　$\therefore\ b_n = \dfrac{3 \cdot 4^{n-1} - 2^{n-1}}{2}$

■

✎**注**　この解法では和と差の 2 通りの組合せを用いて解答しましたが，1 通りの組合せだけでも解くことができます．式 ③ より，$b_n = 3 \cdot 4^{n-1} - a_n$ なので，これを式 ① に代入すると，

$$a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 4^{n-1}$$

これは，$\boxed{\text{Type ⑤}}$ です（両辺を $4^{n+1}$ で割る）．

**解** 2.（**代入法的解法**）.

途中で $a_2$ が必要になるので．最初に自分で求めてください．$a_2 = 3a_1 + b_1 = 7$

① より，$b_n = a_{n+1} - 3a_n$.
よって，$b_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1}$.
これらを ② に代入すると，

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = a_n + 3(a_{n+1} - 3a_n)$$

$$\therefore \quad a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0 \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ⑨}}$$

（$t^2 - 6t + 8 = 0$ より $t = 2,\ 4$）　⟵ **この計算は答案には出さない**
漸化式より，

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = 4(a_{n+1} - 2a_n) & \cdots ③ \\ a_{n+2} - 4a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 4a_n) & \cdots ④ \end{cases}$$

③ より，数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1$，公比 4 の等比数列なので，

$$a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1)4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1} \quad \cdots ③'$$

④ より，数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1$，公比 2 の等比数列なので，

$$a_{n+1} - 4a_n = (a_2 - 4a_1)2^{n-1} = -2^{n-1} \quad \cdots ④'$$

③$'$ − ④$'$ より（辺々を引く），$2a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 2^{n-1}$　　$\therefore \quad a_n = \dfrac{3 \cdot 4^{n-1} + 2^{n-1}}{2}$
よって，$a_{n+1} = \dfrac{3 \cdot 4^n + 2^n}{2}$ なので，

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - 3a_n \\ &= \frac{3 \cdot 4^n + 2^n}{2} - 3 \cdot \frac{3 \cdot 4^{n-1} + 2^{n-1}}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 4^{n-1} - 2^{n-1}}{2} \end{aligned}$$

■

**注**　もちろん，$a_n$ を消去して $b_n$ だけの漸化式を立ててもかまいません．

**演習** 11　　$a_1 = 1, \quad b_1 = 3, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$

★★★ $\boxed{\text{Type ⑫}}$ ナナメの係数が等しくない連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$$

**解** 1. **うまく組合せる**（誘導あり）
**解** 2. **$a_n$ だけの式にする**（代入法的解法）

例題 12　$a_1 = 1$, $b_1 = 3$, $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n & \cdots ② \end{cases}$

(1) $\{a_n + b_n\}$, $\{2a_n - b_n\}$ の一般項を求めよ.
(2) (1) の結果を用いて, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

**解**（うまい組み合わせによる解法）

(1) ①＋② より,

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 5a_n + 5b_n = 5(a_n + b_n)$$

$a_n + b_n = c_n$ とおくと, $c_{n+1} = 5c_n$
よって, 数列 $\{c_n\}$ は, 初項 $c_1$, 公比 5 の等比数列なので,

$$c_n = c_1 5^{n-1} = (a_1 + b_1)5^{n-1} = 4 \cdot 5^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n + b_n = 4 \cdot 5^{n-1} \quad \cdots ③$$

①×2−② より,

$$2a_{n+1} - b_{n+1} = 2(2a_n - b_n)$$

$2a_n - b_n = d_n$ とおくと, $d_{n+1} = 2d_n$
よって, 数列 $\{d_n\}$ は, 初項 $d_1$, 公比 2 の等比数列なので,

$$d_n = d_1 2^{n-1} = (2a_1 - b_1)2^{n-1} = -2^{n-1}$$

$$\therefore \quad 2a_n - b_n = -2^{n-1} \quad \cdots ④$$

(2)
③＋④ より, $3a_n = 4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}$.　$\therefore \quad a_n = \dfrac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$
③×2−④ より, $3b_n = 8 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}$.　$\therefore \quad b_n = \dfrac{8 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}$

■

✎**注** この解法では 2 通りの組合せを用いて解答しましたが, 1 通りの組合せだけでも解くことができます. 式 ③ より, $b_n = 4 \cdot 5^{n-1} - a_n$ なので, これを式 ① に代入すると,

$$a_{n+1} = 2a_n + 4 \cdot 5^{n-1}$$

これは，$\boxed{\text{Type ⑤}}$です（両辺を $5^{n+1}$ で割る）．

**解**（**代入法的解法**）．

途中で $a_2$ が必要になるので．最初に自分で求めてください．$a_2 = 3a_1 + b_1 = 6$

① より，$b_n = a_{n+1} - 3a_n$.
よって，$b_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1}$.
これらを ② に代入すると，

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2a_n + 4(a_{n+1} - 3a_n)$$

$$\therefore\quad a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0 \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ⑨}}$$

（$t^2 - 7t + 10 = 0$ より $t = 2,\ 5$） ⟵ **この計算は答案には出さない**

漸化式より，

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 2a_n) & \cdots ③ \\ a_{n+2} - 5a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 5a_n) & \cdots ④ \end{cases}$$

③ より，数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1$，公比 5 の等比数列なので，

$$a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1)5^{n-1} = 4\cdot 5^{n-1} \quad \cdots ③'$$

④ より，数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1$，公比 2 の等比数列なので，

$$a_{n+1} - 5a_n = (a_2 - 5a_1)2^{n-1} = 2^{n-1} \quad \cdots ④'$$

③$'$ − ④$'$ より（辺々を引く），$3a_n = 4\cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}$ $\qquad \therefore\ a_n = \dfrac{4\cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$

よって，$a_{n+1} = \dfrac{4\cdot 5^n - 2^n}{3}$ なので，

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - 3a_n \\ &= \frac{4\cdot 5^n - 2^n}{3} - 3\cdot\frac{4\cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3} \\ &= \frac{8\cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3} \end{aligned}$$

■

✏**注**　式の組合せ方が誘導されているので，その指示に従います．もし誘導がなければ**代入法的解法で解く**ことになります．

✏**注**　もちろん，$a_n$ を消去して $b_n$ だけの漸化式を立ててもかまいません．

**演習** 12　　$a_1 = 2,\quad b_1 = 6,\quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \cdots① \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n & \cdots② \end{cases}$

(1) $\{a_n + b_n\}$，$\{3a_n - b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

## ★★★★ Type ⑬ 係数に $n$ などを含むタイプ

**解 $a_n$ には $n$ がらみの式，$a_{n+1}$ には $n+1$ がらみの式を対応させる．**

例題 13

(1) $a_1=1$, $(n+2)a_{n+1}=na_n$

(2) $a_1=1$, $na_{n+1}=(n+1)a_n+1$

解 (1) 両辺に$n+1$ **をかける**と，

$$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n$$

$b_n=(n+1)na_n$ とおくと，$b_{n+1}=b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ が一定の値であることを表しているので，

$$b_n=b_1=2\cdot1\cdot a_1=2$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{b_n}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}$$

■

(2) 両辺を$n(n+1)$ **で割る**と，

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$$

$c_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと，$c_{n+1}=c_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$ ← Type ④

数列 $\{c_n\}$ の階差数列の一般項が $\dfrac{1}{n(n+1)}$ であることを表しているので，$n\geqq2$ のとき，

$$\begin{aligned}c_n&=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a_1}{1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}\qquad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

① において $n=1$ とすると，$c_1=2-\dfrac{1}{1}=1$ となり，$c_1=1$ に一致する．

よって，② は $n\geqq1$ で成立する．

$$\therefore\quad c_n=2-\frac{1}{n}\quad(n\geqq1)$$

よって，$a_n=nc_n=2n-1$

■

**注** 実に上手い解法です．$a_n$ に $n$ がらみ，$a_{n+1}$ に $n+1$ がらみを対応させるように，うまく両辺を割ったり，かけたりするわけですが，コレばかりは試行錯誤して見つけるとしか言いようがありません．まあ，係数やそれに似たモノをテキトーに組合せて「かける」か「割る」わけだから，あまり深刻に考えずに，いろいろやってみることでしょう．うまく見つかればラッキーという感じで気楽にやってください．

✎注　分数型の $\sum$ 計算は，部分分数に分けて縦書きするのでした．これはもう大丈夫ですね．

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{1}{1} & - & \dfrac{1}{2} & & (k=1) \\
\dfrac{1}{2} & - & \dfrac{1}{3} & & (k=2) \\
\dfrac{1}{3} & - & \dfrac{1}{4} & & (k=3) \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\cdots \\
\dfrac{1}{n-2} & - & \dfrac{1}{n-1} & & (k=n-2) \\
\dfrac{1}{n-1} & - & \dfrac{1}{n} & & (k=n-1) \\
\hline
\dfrac{1}{1} & - & \dfrac{1}{n} & &
\end{array}$$

**参考** (1) は**具体的に書き出して約分する**という解法もあります．

**別解** (1)　$(n+2)a_{n+1}=na_n$ より，$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n$

この関係を順番に適用すると，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n-1}{n+1}a_{n-1} \\
&= \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}a_{n-2} \\
&= \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}a_{n-3} \\
&\cdots \\
&= \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdots\cdots\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1 \quad (n \geqq 2)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{2\cdot 1}{(n+1)n}a_1=\frac{2}{n(n+1)}\quad (n=1\text{ のときも正しい})$$

これはこれで美しい解法ですが，上手くいかないことのほうが多いので (現に (2) では全く使えない)，積極的にオススメはしません．

✎注　$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n$ の形を見て，$\boxed{\text{Type ①}}$ の $a_{n+1}=pa_n$（$p$ は定数）と混同しないように注意しよう．$\dfrac{n}{n+2}$ は定数ではありません．なので「公比 $\dfrac{n}{n+2}$ の等比数列である」とカンチガイして，$a_n=a_1\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n-1}$ とやってはいけません．全く違います．

**演習** 13

(1)　$a_1=1,\quad (n+3)a_{n+1}=na_n$

(2)　$a_1=2,\quad na_{n+1}=(n+2)a_n+n$

ヒント　(1) は両辺に何かをかけ，(2) は両辺に何かで割ります．

★★★★ Type ⑭　累乗型　$a_{n+1}{}^p = q a_n{}^r$

解　（$a_n > 0$ を確認した上で）**両辺の対数をとる**

『累乗型』漸化式とは，$a_{n+1} = a_n{}^3$ とか $a_{n+1}{}^2 = 4a_n{}^3$ のような型の漸化式のことです．指数は負の数でも分数でも構わないので，$a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n{}^2}$ や $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n}$ などもあります（言うまでもなく，$\dfrac{1}{a_n{}^2} = a_n{}^{-2}$ で，$\sqrt[3]{a_n} = a_n{}^{\frac{1}{3}}$）

この Type は両辺の対数をとることで解決します．対数の「底」は別に何でもかまいませんが，漸化式の係数などを見れば，何を「底」にするのかは自ずとわかってくるはずです．なお，当然ながら，対数計算の基本は完璧であることが前提条件です．

例題 14　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 8a_n{}^2$

解　漸化式より $a_n > 0$ なので，両辺に 2 **を底とする対数をとる**と

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8a_n{}^2$$
$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8 + \log_2 a_n{}^2$$
$$\log_2 a_{n+1} = 3 + 2\log_2 a_n$$

$\log_2 a_n = b_n$ とおくと，$a_1 = 2$ より，$b_1 = \log_2 2 = 1$ であり，

$$b_{n+1} = 2b_n + 3 \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}$$

$$b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$$

よって，数列 $\{b_n + 3\}$ は，初項 $b_1 + 3$，公比 2 の等比数列なので，

$$b_n + 3 = (b_1 + 3)2^{n-1} = (1+3)2^{n-1} = 4\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

よって，

$$b_n = 2^{n+1} - 3$$

$b_n = \log_2 a_n$ より，$a_n = 2^{b_n} = 2^{2^{n+1}-3}$

■

✎注　実はこの漸化式は，2017 年の大阪大学の文系で出題されました．当然ながら「$b_n = \log_2 a_n$ とおいて」という誘導がついていましたが，その問題は，$a_n$ を求めることが目的ではなく，まだまだ続きがありました．大学入試では，漸化式を解くことだけが目標ではないようです．

演習 14　$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$

## ★★ Type ⑮ $S_n$ を含んだ漸化式

**解** $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ を利用して，$a_n$ だけの漸化式に変形する.

例題 15

初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，$S_n=n-a_n$ で表されるとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

**解** まず始めに，$a_1$ を求める．$S_n=n-a_n$ に $n=1$ を代入すると，$S_1=1-a_1$.
$S_1=a_1$ なので，$a_1=1-a_1$．よって，$a_1=\dfrac{1}{2}$.
また，$S_{n+1}=(n+1)-a_{n+1}$ より，

$$\begin{array}{rcccccl} & S_{n+1} & = & (n+1) & - & a_{n+1} & \cdots ① \\ -\,) & S_n & = & n & - & a_n & \cdots ② \\ \hline \end{array}$$

①－② より，$S_{n+1}-S_n=1-a_{n+1}+a_n$.
$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ なので，$a_{n+1}=1-a_{n+1}+a_n$．よって，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2} \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}$$

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1)$$

$$\begin{aligned} a_n-1&=(a_1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &=\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \end{aligned}$$

$$\therefore\ a_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

■

演習 15

初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，$S_n=3n-2a_n$ で表されるとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

## ★★★ Type ⑯　「解けない」漸化式の解き方

**解　$a_n$ を予想して数学的帰納法で証明する．**

どうしても解き方がわからない場合，あるいは，そもそも「解けない」場合は，$a_1$，$a_2$，$a_3$，$\cdots$，から $a_n$ を予想して数学的帰納法で証明するしかありません．

例題 16　$a_1=3$，$a_n{}^2=(n+1)a_{n+1}+1$

解

漸化式に $n=1$ を代入すると，$a_1{}^2=2a_2+1$．$a_1=3$ より，$a_2=4$．

漸化式に $n=2$ を代入すると，$a_2{}^2=3a_3+1$．$a_2=4$ より，$a_3=5$．

漸化式に $n=3$ を代入すると，$a_3{}^2=4a_4+1$．$a_3=5$ より，$a_4=6$．

よって，以上より $a_n=n+2$ であると予測される．このことを数学的帰納法で証明する．

[I] $n=1$ のとき，$a_1=1+2=3$ となり，$n=1$ のとき正しい．

[II] $n=k$ のとき成立すると仮定すると，

$$a_k=k+2$$

このとき，漸化式より $a_k{}^2=(k+1)a_{k+1}+1$ なので，

$$(k+2)^2=(k+1)a_{k+1}+1$$
$$k^2+4k+4=(k+1)a_{k+1}+1$$
$$k^2+4k+3=(k+1)a_{k+1}$$
$$(k+1)(k+3)=(k+1)a_{k+1}$$
$$\therefore\ a_{k+1}=k+3=(k+1)+2$$

したがって，$n=k+1$ のときも成立する．

[I][II] より，すべての自然数 $n$ で成立する．

$$\therefore\ a_n=n+2$$

■

✎**注**　漸化式 $a_n{}^2=(n+1)a_{n+1}+1$ を解くことはできません．いくら考えてもできません．とっとと諦めて数学的帰納法に持ち込むべきです．

大切なことは，**「この漸化式は解けない」とサッと見極めて，予想して数学的帰納法で解こうと思うかどうか，**です．解けないことに気づかずに，延々と漸化式をいじくるのは時間のムダです．

なお，これまでやってきた，いわゆる「解ける」漸化式の場合も，予想して数学的帰納法で求めることも可能ですが，実は**「解ける」漸化式ほど予想が難しい**という悲しい現実もあるので，やっぱり「解ける」漸化式はきちんと解くのが無難でしょう．

**演習** 16　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}$

Type ⑧ ですが，誘導が全くないので解きようがありません．こんな場合も「予想して帰納法」です．

## ★★★ 番外編　「確率」や「場合の数」との融合問題

**⟶ 「漸化式の問題だ」と見抜き，自分で漸化式を立てる**

**確率の場合，状況を推移図で表現するとわかりやすい**

自分で漸化式を立てる問題は入試頻出の重要問題です．「この問題を解くために漸化式を勉強してきた」とも言えます．漸化式自体は単純なので，立式後は，結果のみを記します．

**例 題** 17

表の出る確率が $\frac{1}{3}$ である硬貨を投げて，表が出たら点数を 1 点増やし，裏が出たら点数はそのままとするゲームを行う．0 点から始めて，硬貨を $n$ 回投げたときの点数が偶数である確率 $p_n$ を求めよ．

**考え方** 表が出ると $+1$，裏が出ると $+0$ なので，表が出ると偶奇が変化し，裏が出ると偶奇は変化しません．

よって，$n$ 回目と $n+1$ 回目の推移の様子は

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
n\text{ 回目} & n+1\text{ 回目} & & \\
\text{偶数} \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & \text{偶数} & {} \arrow[r] & \text{表} \\
\text{奇数} \arrow[r, dashed] \arrow[ur] & \text{奇数} & {} \arrow[r, dashed] & \text{裏}
\end{tikzcd}$$

となります．

$n$ 回投げたときの点数が偶数である確率が $p_n$ なので，奇数である確率は $1-p_n$．

（✎**注** 言うまでもなく，$n+1$ 回投げたときの点数が偶数である確率は $p_{n+1}$ で，奇数である確率は $1-p_{n+1}$）．

よって，確率の推移の様子は

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
n\text{ 回目} & n+1\text{ 回目} & & \\
p_n \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & p_{n+1} & {} \arrow[r] & \frac{1}{3} \\
1-p_n \arrow[r, dashed] \arrow[ur] & 1-p_{n+1} & {} \arrow[r, dashed] & \frac{2}{3}
\end{tikzcd}$$

となります．この図を見て漸化式を立てます．漸化式を立てる（すなわち，$p_{n+1}$ を $p_n$ で表す）だけで良ければ，推移図も必要な部分だけで十分ですが，図を描いて終わりではなく，きちんと文章で論述する必要があります．

**解**

表が出ると $+1$，裏が出ると $+0$ されるので，

$(n+1)$ 回目に点数が偶数になるのは，

(i) $n$ 回目で点数が偶数で，$(n+1)$ 回目に裏が出る

(ii) $n$ 回目で点数が奇数で，$(n+1)$ 回目に表が出る

の 2 つの場合であり，これらは互いに排反である．

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
n\text{ 回目} & n+1\text{ 回目} & & \\
p_n \arrow[r, dashed] & p_{n+1} & {} \arrow[r] & \frac{1}{3} \\
1-p_n \arrow[ur] & & {} \arrow[r, dashed] & \frac{2}{3}
\end{tikzcd}$$

したがって，

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{3} + (1-p_n) \times \frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3} \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}$$

また，$p_1$ は 0 点から始めて 1 回投げて偶数になる確率なので，裏が出ればよく，$p_1 = \frac{2}{3}$．

この漸化式を解くと，$p_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

■

**例題** 18

正三角形 ABC とその頂点上にある動点 P を考える．動点 P は 1 分ごとに $\dfrac{2}{3}$ の確率で同じ点にとどまり，$\dfrac{1}{6}$ の確率で隣接する 2 つの頂点のいずれかに移動する．最初，P は頂点 A にあるとし，P が $n$ 分後に頂点 A にいる確率 $p_n$ を求めよ．

**考え方** 頂点 A にいる確率しか問題文に書いてませんが，推移図を書くために，頂点が B，C にいる確率を自分で設定することがポイントです．

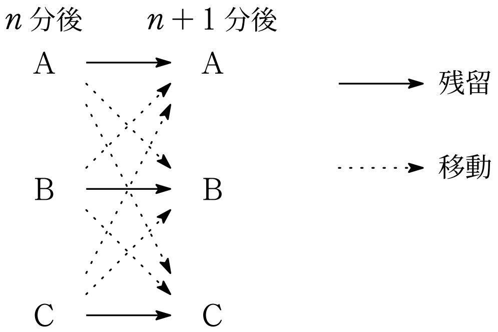
$n$ 分後に頂点 A，B，C にいる確率をそれぞれ，$p_n$，$q_n$，$r_n$ とします．

まず最初に，$n$ 分後には頂点 A，B，C のいずれかに必ずいることになるので，

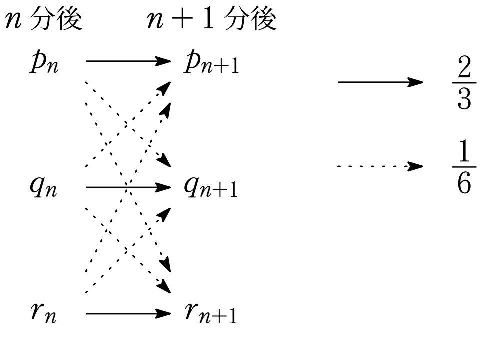
$$p_n + q_n + r_n = 1$$

となることに注意しましょう．

さて，$n$ 分後と $n+1$ 分後の推移の様子は




したがって，確率の推移の様子は




となります．先ほどと同じく，きちんと状況説明して答案を作成しましょう．

$p_{n+1}$ を表すだけなので，推移図も必要な部分だけで十分です．

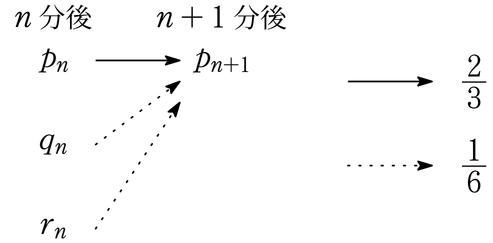
**解** $n$ 分後に頂点 A，B，C にいる確率をそれぞれ，$p_n$，$q_n$，$r_n$ とすると，$n+1$ 分後に頂点 A にいるのは，

(i) $n$ 分後に頂点 A にいて，$(n+1)$ 分後にそのままとどまる

(ii) $n$ 分後に頂点 B にいて，$(n+1)$ 分後に頂点 A に移動する

(iii) $n$ 分後に頂点 C にいて，$(n+1)$ 分後に頂点 A に移動する

の 3 つの場合であり，これらは互いに排反である．




したがって，$p_{n+1} = p_n \times \dfrac{2}{3} + q_n \times \dfrac{1}{6} + r_n \times \dfrac{1}{6}$

$$\therefore \quad p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}(q_n + r_n)$$

$p_n + q_n + r_n = 1$ より，$q_n + r_n = 1 - p_n$．よって，

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n) \quad \cdots\cdots(※)$$

$$\therefore \quad p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6} \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}$$

また，$p_1$ は A から始めて 1 分後に A にいる確率なので，停滞すればよく，$p_1 = \dfrac{2}{3}$．

この漸化式を解いて，$p_n = \dfrac{1}{3}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

■

**注** 頂点 A 以外の点（すなわち頂点 B，C）から頂点 A に移動してくる確率は等しいので，頂点 B，C にいる確率をそれぞれ設定せずに「頂点 A 以外」でひとまとめに考えても構いません．その場合，いきなり（※）の式になります．

当然，頂点 B から A，頂点 C から A に移動する確率が異なっていれば，「ひとまとめ」に考えることは無理なので，今回の解答のように，それぞれの頂点にいる確率を設定する方が無難です．

**例題** 19　AとBの2人が，1個のサイコロを次の手順により投げあう．

- 1回目はAが投げる．
- 1，2，3の目が出たら，次の回には同じ人が投げる．
- 4，5の目が出たら，次の回には別の人が投げる．
- 6の目が出たら，それ以降は投げない．

このとき，$n$回目にAがサイコロを投げる確率$a_n$を求めよ．

［2011年一橋大学（前期）改］

**考え方**　前問と同様に，$n$回目にBがサイコロを投げる確率を自分で設定します．$n$回目にA，Bがサイコロを投げる確率をそれぞれ$a_n$，$b_n$としましょう．前問と違って，今回は，$n$回目にAとBのどちらも投げない場合があるので，

$$a_n + b_n \fallingdotseq 1$$

です．注意しておこう．

さて，$n$回目と$n+1$回目の推移の様子は，

$$\begin{tikzcd} n\text{回目} & n+1\text{回目} & \\ \mathrm{A} \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \mathrm{A} \arrow[r] & 1,\ 2,\ 3\text{が出る} \\ \mathrm{B} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathrm{B} \arrow[r, dashed] & 4,\ 5\text{が出る} \end{tikzcd}$$

よって，確率の推移の様子は

$$\begin{tikzcd} n\text{回目} & n+1\text{回目} & \\ a_n \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & a_{n+1} \arrow[r] & \dfrac{1}{2} \\ b_n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & b_{n+1} \arrow[r, dashed] & \dfrac{1}{3} \end{tikzcd}$$

**解**　$n$回目にA，Bがサイコロを投げる確率をそれぞれ$a_n$，$b_n$とおく．

$(n+1)$回目にAがサイコロを投げるのは，

（i）$n$回目にAが投げて，1，2，3の目が出る

（ii）$n$回目にBが投げて，4，5の目が出る

の2つの場合であり，これらは互いに排反である．

したがって，

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \times \dfrac{1}{2} + b_n \times \dfrac{1}{3} \cdots ① \\ b_{n+1} = a_n \times \dfrac{1}{3} + b_n \times \dfrac{1}{2} \cdots ② \end{cases} \longleftarrow \boxed{\text{Type ⑪}}$$

また，$a_1 = 1$，$b_1 = 0$なので，この連立漸化式を解くと$a_n = \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

■

**注**　今回は$a_n + b_n = 1$ではないので，式①に，$b_n = 1 - a_n$を代入することはできません．①と②を連立して解くしかありません．今回の場合，ナナメの係数が等しい連立漸化式なので，2つの漸化式の和と差を考えて解きます．

**演習** 17

平面上に正四面体が置いてある．平面と接している面の3辺の一つを任意に選び，これを軸として正四面体をたおす．$n$回の操作の後に，最初に平面と接していた面が再び平面と接する確率$p_n$を求めよ．

（1991 東大理系）

**演習** 18

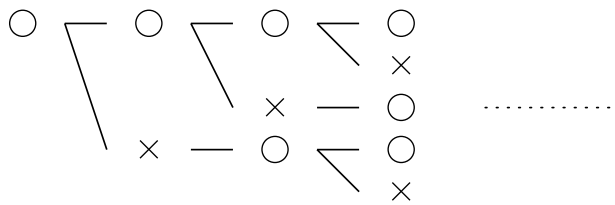
直線上に，赤と白の旗をもった何人かの人が，番号0，1，2，… をつけて並んでいる．番号0の人は，赤と白の旗を等しい確率で無作為にあげるものとし，他の番号$j$の人は，番号$j-1$の人があげた旗の色を見て，確率$p$で同じ色，確率$1-p$で異なる色をあげるものとする．

このとき，番号0と番号$n$の人が同じ色の旗をあげる確率$P_n$を求めよ．（1983 東大文系）

**例題** 20

○と×を合計10個ランダムに横一列に並べるとき，×が連続しないような並び方は何通りあるか．

**考え方** 「○の後は○でも×でも良いが，×の後は絶対に○が並ぶ」というルールに従って，樹形図にして書き出していけば数え上げることは可能です．



しかし，20個，30個となると樹形図を描くことは困難でしょう．こんなときこそ「一般的に考える」，つまり漸化式の登場です．条件に合うように合計 $n$ 個を並べたときの並べ方の総数を $a_n$ 通りとして，漸化式をたてます．

$n=1,\ 2,\ 3$ の場合は以下のようになります．

| $a_1=2$ 通り | $a_2=3$ 通り | $a_3=5$ 通り |
|---|---|---|
| ○ | ○○ | ○○○ |
| × | ○× | ○○× |
| | ×○ | ○×○ |
| | | ×○○ |
| | | ×○× |

漸化式を作るには，最初の一手または最後の一手で場合分けをします．この手法はとても重要です．

**解** 合計 $n$ 個を並べたとき，×が連続しないような並び方を $a_n$ 通りとする．

このとき，次の2通りに分類される．

(i) 最初に○が並んだ場合

| ○ | $n-1$ 個 |
|---|---|

残り $n-1$ 個を条件に合うように並べることと同じなので，$a_{n-1}$ 通り．

(ii) 最初に×が並んだ場合

| × | ○ | $n-2$ 個 |
|---|---|---|

次には必ず○が並ぶので，残り $n-2$ 個を条件に合うように並べることと同じなので，$a_{n-2}$ 通り．

したがって，

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ (n\geqq 3) \longleftarrow \boxed{\text{Type ⑨}}$$

$a_1=2,\ a_2=3$ より，漸化式を適用して，

$a_3=5,\ a_4=8,\ a_5=13,\ a_6=21,\ a_7=34,\ a_8=55,\ a_9=89,\ a_{10}=144$ $\therefore$ 144通り．

■

**注** この漸化式で定義される数列は，いわゆる「フィボナッチ数列」とよばれる数列です．

今回の一般項は，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{(2+\sqrt{5})\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-(2-\sqrt{5})\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}$ となります．

次の問題は，東大理系の問題ではありますが，先ほどの問題と考え方は全く同じです．

**例題** 21

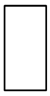
二辺の長さが 1 と 2 の長方形と一辺の長さが 2 の正方形で，縦 2，横 $n$ の長方形を過不足なく敷き詰めることを考える．そのような並べ方の総数を $a_n$ で表す．例えば $a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_3 = 5$ である．

(1) $n \geqq 3$ のとき，$a_n$ を $a_{n-1}$，$a_{n-2}$ で表せ．

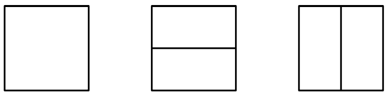
(2) $a_n$ を $n$ で表せ．

［1995 年東京大学（前期）理系］

$n = 1, 2, 3$ の場合は以下のようになります．



$a_1 = 1$ 通り



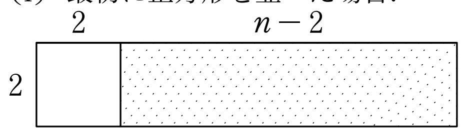
$a_2 = 3$ 通り

$a_3 = 5$ 通り

漸化式を作るには，最初の一手または最後の一手で場合分けをします．この手法はとても重要です．

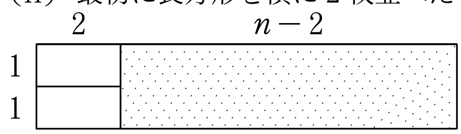
**解** 左から敷き詰めるとき，次の 3 通りに分類される．

(i) 最初に正方形を並べた場合．



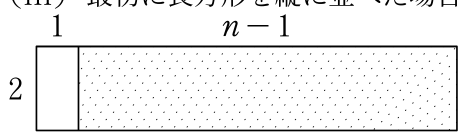

縦 2，横 $n-2$ の部分（図の点線部分）を敷き詰めることと同じなので，$a_{n-2}$ 通り．

(ii) 最初に長方形を横に 2 枚並べた場合．




縦 2，横 $n-2$ の部分（図の点線部分）を敷き詰めることと同じなので，$a_{n-2}$ 通り．

(iii) 最初に長方形を縦に並べた場合．




縦 2，横 $n-1$ の部分（図の点線部分）を敷き詰めることと同じなので，$a_{n-1}$ 通り．

したがって，

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n \geqq 3) \longleftarrow \boxed{\text{Type ⑨}}$$

この漸化式を解いて，$a_n = \dfrac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}$

■

次の問題がきちんとできれば，自分で漸化式をたてる問題は十分マスターできたと言えるでしょう．京大特有の「誘導のない」シンプルな問題．まずは「漸化式で解こう」と思うかどうか．思ったとしてどのようにして漸化式をたてるのか，いろいろ勉強になる問題です．

**例 題** 22

$n$ を自然数とする．$n$ 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている．各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて $n$ 桁の整数 $X$ を作る．このとき $X$ が 3 で割り切れる確率を求めよ．

［2017 年京都大学理系］

**考え方** 言うまでもなく，$n$ 桁の整数が 3 で割り切れるための条件は，各位の数字の和が 3 で割り切れることです．つまり「$n$ 個の数字の和が 3 の倍数である確率」を求めることになります．$n+1$ 個の数字の和が 3 の倍数になるためには，$n$ 個の数字の和が 3 の倍数かどうかで $n+1$ 個目の数字が変わってきます．

**解** $n$ 桁の数 $X$ を $X_n$ とおく．$k$ 回目に取り出したカードの数字を $a_k$ とおくと，$X_n$ が 3 で割り切れるための条件は，$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ が 3 で割り切れることである．

ここで，

$X_n$ が 3 で割り切れる確率を $p_n$，

$X_n$ が 3 で割って 1 余る確率を $q_n$，

$X_n$ が 3 で割って 1 余る確率を $r_n$

とすると，$X_{n+1}$ が 3 で割り切れるのは，

(i) $X_n$ が 3 で割り切れて，$a_{n+1}=3$ となる

(ii) $X_n$ が 3 で割ると 1 余り，$a_{n+1}=2,\ 5$ となる

(iii) $X_n$ が 3 で割ると 2 余り，$a_{n+1}=1,\ 4$ となる

の 3 つの場合があり，これらはすべて排反である．


したがって，

$$p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{5}+q_n\times\frac{2}{5}+r_n\times\frac{2}{5}$$

$$\therefore\ p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}(q_n+r_n)$$

$p_n+q_n+r_n=1$ より，$q_n+r_n=1-p_n$．よって，

$$p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}(1-p_n)$$

$$\therefore\ p_{n+1}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5} \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ③}}$$

また，$p_1$ は最初に $\boxed{3}$ を取り出す確率なので，$p_1=\dfrac{1}{5}$．

この漸化式を解いて，$p_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$

■

**注** 証明の根底にあるのは

(3 の倍数)＋(3 の倍数)＝(3 の倍数)

(3 で割ると 1 余る数)＋(3 で割ると 2 余る数)
＝(3 の倍数)

(3 で割ると 2 余る数)＋(3 で割ると 1 余る数)
＝(3 の倍数)

という当たり前の事実です．合同式で表記すれば

$$0+0\equiv 0 \pmod 3$$

$$1+2\equiv 0 \pmod 3$$

$$2+1\equiv 0 \pmod 3$$

いずれにせよ，3 で割った余りで分類して，$p_n$，$q_n$，$r_n$ を自分で設定することがポイントです．

次の問題は (2) の「互いに素」の証明がメインなので，漸化式の問題というよりも整数の問題です．整数問題を学ぶ上で非常に重要な問題で，絶対に取り組まねばならない問題ですが，今のところは (1) だけで十分でしょう．

**例 題** 23

$n$ は正の整数とする．$x^{n+1}$ を $x^2-x-1$ で割った余りを $a_nx+b_n$ とおく．

(1) 数列 $a_n$，$b_n$ ($n=1$，2，3，…) は

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ．

(2) $n=1$，2，3，… に対して，$a_n$，$b_n$ は共に正の整数で，互いに素であることを証明せよ．

[2002 年東京大学 (前期) 文理共通問題]

**解** (1) $x^{n+1}$ を $x^2-x-1$ で割った商を $Q_n(x)$ とおくと，

$$x^{n+1}=(x^2-x-1)Q_n(x)+a_nx+b_n$$

と書ける．この式の両辺に $x$ をかけて，

$$x^{n+2}=x(x^2-x-1)Q_n(x)+a_nx^2+b_nx$$

$(a_nx^2+b_nx)\div(x^2-x-1)$ を実際に筆算で計算して

$$a_nx^2+b_nx=a_n(x^2-x-1)+(a_n+b_n)x+a_n$$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^{n+2}&=x(x^2-x-1)Q_n(x)+a_n(x^2-x-1)\\&\qquad+(a_n+b_n)x+a_n\\&=(x^2-x-1)\{xQ_n(x)+a_n\}\\&\qquad+(a_n+b_n)x+a_n\end{aligned}$$

これは，$x^{n+2}$ を $x^2-x-1$ で割った余りが，$(a_n+b_n)x+a_n$ であることを意味しているので，

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

が成立する．

(2) 数学的帰納法で証明する．

(i) $a_n$，$b_n$ は共に正の整数であることの証明.

$$x^2=(x^2-x-1)+x+1$$

だから，$a_1=b_1=1$ である．

$a_k$，$b_k$ が共に正の整数であると仮定すると，(1) の結果より，$a_{k+1}$，$b_{k+1}$ も正の整数になるので，全ての自然数 $n$ に対して，$a_n$，$b_n$ は共に正の整数である．

(ii) $a_n$，$b_n$ は共に互いに素であることの証明.

まず，$a_1=b_1=1$ であるので，$a_1$ と $b_1$ は互いに素である．次に

$a_k$，$b_k$が互いに素 $\Longrightarrow$ $a_{k+1}$，$b_{k+1}$も互いに素 …①

を証明する．

$a_{k+1}$，$b_{k+1}$ が互いに素でないと仮定すると，共通の素因数 $p$ が存在し，

$$a_{k+1}=p\alpha,\ b_{k+1}=p\beta$$

とおける．(1) の結果より，

$$a_k=b_{k+1}=p\beta,\ b_k=a_{k+1}-b_{k+1}=p(\alpha-\beta)$$

となるので，$a_k$，$b_k$ も互いに素ではない．

よって，① の対偶が証明されたので，① は真である．全ての自然数 $n$ に対して，$a_n$，$b_n$ は互いに素であることが示された．

■

**注** 「互いに素である」とは「共通の素因数をもたないこと」です．詳しくは，犬プリ「互いに素 (Part.1)」を参照のこと．

次の3問はいずれも京都大学の問題です．問題文に数列的な雰囲気は皆無ですが（誘導がないのは京大の特徴），こういう問題を見たときに「漸化式で考えよう」と思うかどうかが運命の分かれ道です．

**演習** 19

1歩で1段または2段のいずれかで階段を昇るとき，1歩で2段昇ることは連続しないものとする．15段の階段を昇る昇り方は何通りあるか．（2007 京大理系）

考え方　例題 20　21 を参照．

$n$ 段の昇り方を $a_n$ 通りとして漸化式をたてよう．なお，この漸化式は解くことができませんが，$a_{15}$ を求めるだけなので，漸化式を繰り返し適用して，$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_{15}$ を求めればよろしい．

**演習** 20

先頭車両から順に1から $n$ までの番号のついた $n$ 両編成の列車がある．ただし，$n \geqq 2$ とする．各車両を赤色，青色，黄色のいずれか1色で塗るとき，隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りあるか．（2005 京大理系）

考え方　例題 20　21 を参照．

条件を満たす $n$ 両編成の塗り方を $a_n$ 通りあるとして漸化式をたてます．$a_2$，$a_3$ も調べます．

**演習** 21

$n$ は自然数とし，$x^n$ を $x^2-2x-1$ で割った余りを $ax+b$ とする．このとき，$a$，$b$ は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．（2013 京大理系）

考え方　例題 23　の東大の問題を参照すれば気づくと思いますが，全く同じ問題です．東大の出題から11年後に京大で全く同じ問題が出題されました．あえて違いを言うなら「互いに素」という言葉を使わずに，「ともに割り切る素数が存在しない」と丁寧に書いてあることぐらいです．東大の問題を解いた経験があれば，どうってことない問題なのですが，初見だとなかなか厳しいと思います．

というのも，例題 23　の東大の問題でも述べたように，(1) の連立漸化式がポイントなので，やはりこの問題でも連立漸化式を導き出さねばならないからです．しかし，東大の問題が余りを「$a_nx+b_n$」と数列の雰囲気を出して表記していたのに対し，この京大の問題では余りが単に「$ax+b$」となっています．ここから果たして数列をイメージできるでしょうか？

おそらくこの問題は「$x^n$ を $x^2-2x-1$ で割った余りが $ax+b$」という文章を見て，「$a$ も $b$ も $n$ に依存するから，$n$ の関数，つまり数列とみなせる」という発想ができるかどうかを問うていると思われます．東大とは視点が違います．その点で，この京大の問題は東大の問題よりも難易度が高いと思います．

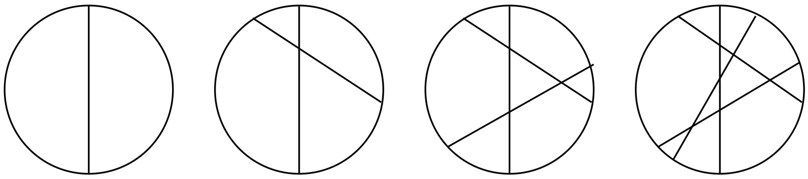
最後に，みんなが苦手とする問題を紹介しときます.

**例 題** 24

丸いピザを包丁でまっすぐに切る．1 回切るとどんな切り方をしてもピザは 2 片に分割される．2 回だと 3 片か 4 片に分割される．このとき，$n$ 回切ったときの最大分割数を $a_n$ とおく．例えば $a_1 = 2$，$a_2 = 4$，$a_3 = 7$ である．$a_n$ を $n$ で表せ.

[2014 年高知大学]

**考え方** $a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$ を図示してみると，以下のようになります．切り口を 1 本増やすと，その切り口がいくつかの線分に分かれ，**その線分が新たな切り口となってピザ片をさらに分割**しています.



$a_1 = 2$　　$a_2 = 4$　　$a_3 = 7$　　$a_4 = 11$

解答は書きにくいですが「漸化式を立てる」=「一般的に考える」ということなので，次のような感じで十分でしょう.「単なる予想」にならないように，丁寧な論述を心がけよう.

**解** $n+1$ 回目に新しく切った切り口は，1 回目から $n$ 回目までのすべての切り口と異なる点で 1 回ずつ交わり，線分は $n+1$ 本に分かれる．線分が 1 本増えるごとにピザは 1 片増えるので

$$a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad \longleftarrow \boxed{\text{Type ④}}$$

$a_{n+1} - a_n = n + 1$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $n+1$ である.

したがって，$\underline{n \geqq 2 \text{ のとき}}$,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{n^2+n+2}{2} \quad \cdots ①$$

① において $n = 1$ とすると，$a_1 = \dfrac{1+1+2}{2} = 2$ となり，$a_1 = 2$ に一致する．よって，① は $n \geqq 1$ で成立する.

$$\therefore \quad a_n = \frac{n^2+n+1}{2} \quad (n \geqq 1)$$

■

**演習** 22

平面上にどの 2 つをとっても互いに 2 点で交わり，また，どの 3 つをとっても同一の点で交わらない $n$ 個の円がある．これらの円によって平面は何個の部分に分けられるか．その個数 $a_n$ を $n$ で表せ.

**考え方** とりあえず条件に合うように円を図示し，$a_1$，$a_2$，$a_3$，$\cdots$，を計算してみよう.「単なる予想」で終わらないように，丁寧な論述を心がけよう.

# 演習問題の答え

**演習 1.** $a_n = -3n + 2$

**演習 2.** $a_n = -(-2)^n$

**演習 3.** (1) $a_n = 2 \cdot 4^{n-1} - 1$　　(2) $a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} - 1$

**演習 4.** $a_n = \dfrac{1}{3}(n^3 - n + 6)$.（➾注　因数分解して $a_n = \dfrac{1}{3}(n+2)(n^2 - 2n + 3)$ も可）

**演習 5.** $a_n = 2^n - 2^{2n-1}$

**演習 6.** $a_n = -2^{n-1} + 2n + 1$

**演習 7.** (1) $a_n = \dfrac{1}{4n+1}$　　(2) $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1} + 1}$

**演習 8.** (1) $b_{n+1} = 4b_n$　　(2) $a_n = \dfrac{6 \cdot 4^n + 8}{3 \cdot 4^n - 8}$

**演習 9.** (1) $a_n = \dfrac{7 \cdot 2^{n-1} - 2(-3)^{n-1}}{5}$　　(2) $a_n = \dfrac{7^{n-1} - 1}{6}$

**演習 10.** $a_n = (n-1)2^{n-1}$

**演習 11.** $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$　　$b_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 1$

**演習 12.** (1) $a_n + b_n = 8 \cdot 5^{n-1}$，$3a_n - b_n = 0$　　(2) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$，$b_n = 6 \cdot 5^{n-1}$

**演習 13.** (1) $a_n = \dfrac{6}{n(n+1)(n+2)}$　　(2) $a_n = \dfrac{n(3n+1)}{2}$

**演習 14.** $a_n = 2^{2-2^{2-n}}$

**演習 15.** $a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + 1$ より，$a_n = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} + 3$

**演習 16.** $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$

**演習 17.** $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}(1 - p_n)$，$p_1 = 0$ より，$p_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

**演習 18.** $P_{n+1} = P_n \times p + (1 - P_n) \times (1 - p)$，$P_1 = p$ より，$P_n = \dfrac{1}{2}\{1 + (2p-1)^n\}$

**演習 19.** $a_{n+3} = a_{n+2} + a_n$，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 3$ より，$a_{15} = 277$

**演習 20.** $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$，$a_2 = 5$，$a_3 = 11$ より，$a_n = \dfrac{2^{n+2} - (-1)^n}{3}$

➾注　例題 21 の東大のタイルの問題と全く同じ漸化式です.

**演習 21.** $x^n$ を $x^2 - 2x - 1$ で割った余りを $a_nx + b_n$ とおくと，$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$ が成立する.

あとは，例題 23 の東大の問題と全く同じ

**演習 22.** $a_1 = 2$，$a_{n+1} = a_n + 2n$ より，$a_n = n^2 - n + 2$